случае некорректно. В следующей статье будут рассмотрены конкретные космологические модели, в которых спин (4) не сохраняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Trautman A.//Sympos. Math. 1973. 12. P. 139; Hehl F. W., Heyde P. von der, Kerlick G. D., Nester J. M.//Rev. Mod. Phys. 1976. 48. P. 393—416; Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Обухов Ю. Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. М., 1985. С. 168; Иваненко Д. Д., Пронин П. И., Сарданашвили Г. А. Калибровочная теория гравитации. М., 1985. С. 136. [2] Короткий В. А., Обухов Ю. Н.// //Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физ. Астрон. 1987. 28, № 4. С. 6—11. [3] Kuchowicz B. Preprint N 51 Inst. Astr. Pol. Acad. Sci., 1975; J. Phys. A. 1975. 8. P. L29—33. [4] Trautman A.//Nature. 1973. 242. P. 7; Kopczinski W.//Phys. Lett. 1972. A39. P. 219—220; Ibid. A43. P. 63—64. [5] Нургалиев И. С., Пономарев В. Н.//Изв. вузов. Физика. 1982. № 10. С. 63—65; Нургалиев И. С., Пономарев В. Н.//Там же. 1982. № 9. С. 32—35.

Поступила в редакцию
04.06.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 6

УДК 530.145.6

КОЭФФИЦИЕНТЫ РЭЛЕЯ—ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

В. Б. Гостев, А. Р. Френкин

(кафедра теоретической физики)

Показано, что сдвиг уровней энергии четных состояний дискретного спектра сингулярным возмущением $\lambda|x|^{-\nu}$ описывается стандартными формулами Рэлея—Шрёдингера только при $0<\nu<3/2$.

Сингулярные возмущения вида

$$\lambda W(x)=\lambda|x|^{-\nu} \tag{1}$$

представляют значительный интерес в математической физике; они были рассмотрены в ряде работ (см. обзор в [1]). Однако корректная теория возмущений (ТВ) дискретного спектра до сих пор не построена, так как приводит к трудностям, связанным с устранением расходимостей, возникающих при вычислении матричных элементов (МЭ).

В настоящей работе мы покажем, что в случае слабой сингулярности ($1\leqslant\nu<3/2$ в четном случае, $1\leqslant\nu<2$ в нечетном) ТВ Рэлея — Шрёдингера существует.

Исследуем чисто дискретный спектр уравнения Шрёдингера (УШ) ($\hbar=2m=1$)

$$\psi''(x)-(V(x)+\lambda|x|^{-\nu})\psi(x)+E\psi(x)=0 \tag{2}$$

с четным гладким удерживающим потенциалом $V(x)$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} V(x)=+\infty$, $V'(x)>0$ при $x>x_0>0$, $V(-x)=V(x)$, $V(0)=0$, при $x\to 0$ $V(x)\simeq C|x|^{\gamma}$, $C, \gamma>0$).

УШ (2) при $\nu<2$ имеет два линейно независимых решения: $\psi_{+\nu}(x)$, $\psi_{-\nu}(x)\in L_2(0, a)$, $a>0$, со следующим поведением при $x\to+0$:

$$\psi_{-\nu}(x)=x(1+\lambda(2-\nu)(3-\nu)x^{2-\nu}+\ldots), \tag{3}$$

$$\psi_{+\nu}(x)=1-\lambda(2-\nu)(\nu-1)x^{2-\nu}+\ldots,\quad \nu\neq 2-n^{-1},\ n=1, 2,\ldots, \tag{4}$$

$$\psi_{+1}(x)=1+\lambda x(\ln x-1)+\ldots . \tag{5}$$

При $\nu=2-n^{-1}$ вид функций (4) несколько видоизменяется, но это не влияет на все дальнейшие выводы.

Решение (3) переходит при $\lambda\to 0$ в нечетное решение невозмущенного УШ (2) при $\lambda=0$ $\psi_-(x)$, решения (4) и (5) — в четное $\psi_+(x)$.

Удовлетворить стандартному для четных состояний условию

$$\psi'(0)\psi^{-1}(0)=0 \tag{6}$$

при возмущении (1) невозможно из-за сингулярности $\psi'_{+\nu}(0)$. Поэтому мы будем строить четные решения УШ (2) путем четного продолжения смеси $\psi_{+\nu}$ и $\psi_{-\nu}$ на $x<0$:

$$\psi_\alpha(x)=\cos\alpha\psi_{+\nu}(|x|)+\sin\alpha\psi_{-\nu}(|x|), \quad -\pi/2\leqslant\alpha\leqslant\pi/2. \tag{7}$$

Функции (7), как и (3)—(5), удовлетворяют при $x\to 0$ граничному условию, не зависящему от E.

Выбор $\alpha=\pi/2$, сделанный в [2], приводит к отсутствию непрерывности по λ при переходе от четных решений невозмущенного УШ (2) ($\lambda=0$) к функциям (3).

Выбор четного решения УШ (2) в форме (7) автоматически приводит к изменению УШ (2), так как функция (7) удовлетворяет УШ с добавочным точечным потенциалом:

$$\psi''(x)+(E-V(x)-\lambda W(x)-U(x))\psi(x)=0, \tag{8}$$

$$U(x)=2\delta(x)\frac{d\ln\psi(|x|)}{d|x|}, \tag{9}$$

$$U(x)=\begin{cases} 2\delta(x)|x|^{-1}\sum\limits_{k=1}^{q}\lambda^k h_k(\nu)|x|^{(2-\nu)k}+2\delta(x)\operatorname{tg}\alpha, \ \alpha\neq\frac{\pi}{2}, & (10)\\ \nu\neq 2-n^{-1},\ n=1,2,\ldots,\ h_1(\nu)=-(\nu-1)^{-1},\ q=\varepsilon((2-\nu)^{-1}), & \\ 2\lambda\ln|x|\delta(x)+2\delta(x)\operatorname{tg}\alpha, \quad \nu=1, & (11)\\ \pm 2\delta(x)|x|^{-1}, \quad \alpha=\pm\pi/2. & (12)\end{cases}$$

Здесь $\varepsilon(z)$ — целая часть z, коэффициенты $h_k(\nu)$ не зависят от потенциала $V(x)$. Формулы (10), (11) без последнего слагаемого были получены в [3] с помощью функционального интегрирования.

Различные возможности выбора параметра смеси α рассматривались в литературе [2, 4].

Мы не будем здесь обсуждать этот вопрос, считая угол смеси α фиксированным. Часть потенциала $U(x)$ (9), не зависящую от λ, естественно включить в невозмущенный потенциал, а часть, исчезающую при $\lambda\to 0$, рассматривать как дополнительное возмущение, исключить которое ни при каком выборе $\alpha\neq\pi/2$ невозможно.

Рассмотрим подробнее случай $\alpha=0$. Для него полное возмущение $\lambda W(x)$ имеет вид ($1<\nu<2$, $\nu\neq 2-n^{-1}$, $n=2, 3\ldots$)

$$W(x)=|x|^{-\nu}-2(\nu-1)^{-1}|x|^{1-\nu}\delta(x)+\lambda h_2(\nu)|x|^{3-2\nu}\delta(x)+\ldots, \tag{13}$$

невозмущенный потенциал не меняется. Четные нормированные функции для невозмущенного потенциала обозначим $\psi_{n+}(x)$, $n=0, 1, 2$, уровни энергии $E^{(0)}{}_{n+}$ (при $x\to 0$, $\psi_{n+}(x)\simeq C_n+d_nx^2+\ldots$).

При $\nu<3/2$ полное возмущение линейно по λ (10):

$$W(x)=|x|^{-\nu}-2(\nu-1)^{-1}|x|^{1-\nu}\delta(x) \tag{14}$$

и, несмотря на то что каждое из слагаемых МЭ возмущения

$$W_{kn}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_{k+}W(x)\,\psi_{n+}\,dx \tag{15}$$

расходится, полный МЭ конечен и однозначен:

$$\begin{aligned}
W_{kn}&=2\int\limits_{0}^{\infty}\psi_{k+}\psi_{n+}\left(x^{-\nu}-2\,(\nu-1)^{-1}\,x^{1-\nu}\delta(x)\right)dx=\\
&=2\lim_{a\to+0}\int\limits_{a}^{\infty}\psi_{k+}\psi_{n+}\left(x^{-\nu}-2\,(\nu-1)\,x^{1-\nu}\delta(x-a)\right)dx=\\
&=2\lim_{a\to+0}\Big[-(\nu-1)^{-1}\,x^{1-\nu}\psi_{k+}\psi_{n+}\Big|_{a}^{\infty}-(\nu-1)^{-1}\,a^{1-\nu}\psi_{k+}(a)\,\psi_{n+}(a)+\\
&+(\nu-1)^{-1}\int\limits_{a}^{\infty}x^{1-\nu}(\psi_{k+}\psi_{n+})'\,dx\Big]=2\,(\nu-1)\int\limits_{0}^{\infty}(\psi_{k+}\psi_{n+})'\,x^{1-\nu}\,dx.
\end{aligned} \tag{16}$$

При $\nu\geqslant 3/2$ регуляризовать МЭ не удается — остаются расходимости $\sim\lambda$, λ^2 за счет вклада следующих слагаемых точечного возмущения $U(x)$ (10). Попытка введения контрчленов в УШ при $\nu\geqslant 3/2$ (по аналогии с квантовой теорией поля) приводит к противоречию.

При $\nu=1$ $\psi_{+1}(x)$ имеет логарифмическую особенность [5] и согласно формуле (11) при $\alpha=0$ МЭ будет

$$W_{kn}=-2\int\limits_{0}^{\infty}\ln x\,(\psi_{k+}\psi_{n+})'\,dx. \tag{17}$$

При $0<\nu<1$ точечный потенциал в МЭ вклада не дает — существует обычная «хорошая» ТВ.

Таким образом, МЭ на четных функциях конечны только при $\nu<3/2$. Однако конечности МЭ (16), (17) недостаточно для существования коэффициентов Рэлея—Шрёдингера, рядов ТВ (рядов по степеням λ) для уровней энергии и проекций волновых функций на невозмущенные состояния. Коэффициенты РШ могут расходиться при расходимости сумм в высших поправках [1], [5, с. 163—166]:

$$\left.\begin{aligned}
&E_n=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\,\Delta E_n^{\prime(j)},\\
&(\psi_{n+1},\ \psi_m)=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\,\Delta\psi_{nm}^{(j)},\\
&\Delta E_n^{(0)}=E_n^{(0)},\quad \Delta E_n^{(1)}=W_{nn},\quad \Delta E_n^{(2)}=\sum_{l}{}'\,W_{nl}\mu_{ln},\\
&\Delta\psi_{nm}^{(0)}=\delta_{nm},\quad \Delta\psi_{nm}^{(1)}=W_{mn}\mu_{nm}(1-\delta_{mn}),
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где $\psi_n(x)$ — нормированные решения УШ (2), $\mu_{nn}=(E_n^{(0)}-E_k^{(0)})^{-1}$. Сходимость сумм в формулах (18) и особенно для высших поправок определяется поведением при $n\to\infty$ уровней $E_n^{(0)}$ и МЭ (16), (17).

Высоковозбужденные состояния ($n\gg 1$) хорошо описываются квазиклассически, квазиклассические функции можно применять и в ТВ для вычисления МЭ [5, с. 206—225].

В дальнейшем будем предполагать, что

$$V(x) = |x|^{\gamma}, \quad \gamma > 0. \tag{19}$$

Предположение (19) существенно упрощает выкладки и не влияет на окончательные выводы.

Для потенциала (19) квазиклассические уровни и волновые функции с точностью до порядка величин имеют вид

$$\psi_{n+} = N_n k_n^{-1/2}(x) \cos \beta_n(x), \tag{20}$$

n — номер состояния,

$$\beta_n = \int_0^x k_n(y)\, dy, \tag{21}$$

$$k_n(x) = (E_n^{(0)} - x^{\gamma})^{1/2}, \tag{22}$$

$$E_n^{(0)} \sim n^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}, \tag{23}$$

$$N_n \sim n^{\frac{\gamma-2}{2(\gamma+2)}}. \tag{24}$$

Формула (20) применима только для внутренней области вдали от правой точки поворота x_{n0} (за ней $\psi_n = \exp[-2x^{(\gamma+2)/2}(\gamma+2)^{-1}]$).

С помощью формул (20)—(24) получаем для МЭ (16) в случае фиксированного l и $n \to \infty$

$$W_{ln} = C \int_0^b (\psi_{l+}\psi_{n+})' x^{1-\nu}\, dx = C N_n k_n^{1/2} \int_0^b x^{1-\nu} \psi_{l+} \sin k_n x\, dx, \tag{25}$$

где $x_{l0} < b \ll x_{n0}$,

$$k_n = k_n(0) = E_n^{1/2} \backsim n^{\gamma/(\gamma+2)}, \tag{26}$$

во втором равенстве (25) проведено дифференцирование после разложения фазы (21) по x и оставлены наиболее быстро растущие при больших n члены. Учитывая гладкость $\psi_{l+}(x)$ и особенность подынтегрального выражения (25) $x^{1-\nu} = x^{(2-\nu)-1}$, можно для нахождения главного члена асимптотики интеграла (25) воспользоваться известной формулой [16]

$$\int_\alpha^\beta e^{inx} (x-\alpha)^{\xi-1} \varphi(x)\, dx = C\varphi(\alpha)\, n^{-\xi}, \quad 0 < \xi < 1, \ n \to \infty, \tag{27}$$

применение которой дает для МЭ (16) асимптотику

$$W_{ln} = n^{w_l}, \quad w_l = (\gamma+2)^{-1} [\gamma(\nu-1) - 1]. \tag{28}$$

Если же l, $n \gg 1$, $l/n \backsim 1$, то аналогичные оценки дают

$$W_{ln} \backsim N_l N_n k_l^{1/2} k_n^{1/2} (k_l + k_n)^{\nu-2}, \tag{29}$$

$$W_{nn} \backsim n^{w}, \quad w = (\gamma+2)^{-1} [\gamma(\nu-1) - 2]. \tag{30}$$

Среди слагаемых, входящих в коэффициенты РШ для уровней энергии и проекций волновых функций [1], [5, с. 163—166], наиболее быстро возрастающими с ростом ν являются входящие в эти коэффициенты суммы вида

$$\sum_s = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_s}{}' W_{ni_1}\mu_{i_1 n} W_{i_1 i_2}\mu_{i_2 n} \ldots \mu_{i_s n} W_{i_s m}. \tag{31}$$

Сходимость сумм (31) можно оценить, переходя при $i_j \gg 1$, $j=1, 2 \ldots s$, к интегрированию по $dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_s}$ вместо суммирования и вводя, как это обычно делается в теории поля [7], s-мерные полярные координаты. Сумма (32) после интегрирования по углам

$$\sum_s \sim \int^{\infty} \rho^{-1-q_s} d\rho \tag{32}$$

сходится при $\rho \to \infty$, если сходится интеграл (32), т. е. при условии, что индекс роста суммы

$$q_s(\gamma, \nu) > 0. \tag{33}$$

Теория возмущений РШ имеет смысл, если существуют (сходятся) все коэффициенты РШ, т. е. условие (33) справедливо при всех $s=1$, $2, \ldots$. При $n_{ij} \gg 1$, n, m фиксированных

$$\mu_{i_j n} = (E_{i_j}^{(0)} - E_n^{(0)})^{-1} \simeq (E_{i_j}^{(0)})^{-1} \sim \rho^{\mu}, \quad \mu = 2\gamma(\gamma+2)^{-1}. \tag{34}$$

С учетом того, что элемент объема в s-мерном пространстве $dV_s \infty$ $\infty \rho^{s-1} d\rho$, получаем для индекса суммы простое выражение

$$q_s = -2w_b + (s-1)w + s\mu - s, \tag{35}$$

что вместе с формулами (28), (30), (34) дает

$$q_s = \gamma(\gamma+2)^{-1}[2s+1-(s+1)\nu]. \tag{36}$$

Условия сходимости (33) эквивалентны ограничениям

$$\nu < 2 - (s+1)^{-1}, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{37}$$

т. е. при всех $\gamma > 0$ все коэффициенты РШ существуют при том же условии

$$\nu < 3/2, \tag{38}$$

что и МЭ.

Исходя из изложенного, мы считаем, что при $0 < \gamma < 3/2$ в качестве четных функций состояний дискретного спектра можно взять функции (4) или (7), для которых поведение МЭ и коэффициентов РШ аналогично поведению этих величин для функций (4). Использование в качестве четных функций (3) [2] нежелательно из-за их двукратного вырождения по четности. Эти функции, бесспорно, должны быть взяты в качестве нечетных при всех ν. Четным образом мы можем продолжать функции только при $\nu \geqslant 3/2$, когда не существует ТВ РШ для состояний (4) и (7). Для оправдания этого выбора ($\alpha = \pi/2$, $\nu \geqslant 3/2$) и определения верхней границы ν, когда еще применима ТВ РШ, в нечетном (радиальном $0 \leqslant r \leqslant \infty$, $\psi(r) = \psi_{-\nu}(r)$) случае надо сделать оценки, аналогичные (38), (28), (29), (30).

В результате вместо соотношения (38) получаем

$$\nu < 2 + (1+s)^{-1}, \tag{39}$$

т. е. все коэффициенты РШ существуют при $\nu<2$. Неприменимость ТВ РШ при $\nu\geqslant 2$ естественна, так как при столь сильной особенности происходит для $\lambda<0$ падение на центр (дно ямы) [5, с. 145]. Однако вплоть до $\nu<3$ уровни энергии могут быть разложены в ряд по λ методами, отличными от ТВ РШ [8]. Аналитичность уровней энергии по λ имеет место и в четном случае при $3/2<\nu<2$; $\nu=2$, $|\lambda|<1/4$.

Отметим, что при переходе параметра возмущения ν через граничные значения $\nu=3/2$, $\nu=2$ точные четные и нечетные функции меняют свое поведение (3), (4) при $x=0$. У четной функции (4) при $\nu=3/2$ производная перестает быть квадратично интегрируемой, а у нечетной вместо (3) $\psi_{-\nu}(x)\backsim x^{\nu/4}\exp(-2\sqrt{\lambda}(\nu-2)^{-1}x^{-(\nu-2)/2}$, $x\to+0$, $\nu>2$, $\lambda>0)$ [5, с. 215].

Так как основные выводы — существование МЭ и коэффициентов РШ при $\nu<3/2$ в четном случае, существование коэффициентов РШ при $\nu<2$ в нечетном — не зависят от величины $\gamma>0$, то они справедливы и для любого гладкого четного удерживающего потенциала. Отсюда следует реабилитация (вопреки [9]) теории возмущений для слабо сингулярных возмущений ($1\leqslant\nu<3/2$) четных состояний дискретного спектра и тем самым возможность рассматривать эту квантовомеханическую задачу как модель квантовой теории поля, где рядам РШ соответствуют фейнмановские диаграммы [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., 1982. Т. 4. Гл. 12. [2] Klauder J.//Acta Phys. Austriaca Suppl. 1973. **11**. P. 341—387. [3] Ezawa H., Klauder J., Shepp L.//J. Math. Phys. 1975. **16**. P. 783—799. [4] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р.//ТМФ. 1986. **68**. С. 45—57. [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1974. [6] Копсон Э. Асимптотические разложения. М., 1966. С. 40. [7] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1984. § 29. [8] Harrell E.//Ann. Phys. 1977. **105**. P. 379—406. [9] Calogero F.//J. Math. Phys. 1969. **10**. P. 2191—2220.

Поступила в редакцию
24.06.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 6

УДК 530.12

О ТОЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЗАДАННОМ ФОНЕ

А. Н. Петров, А. Д. Попова

(ГАИШ)

Построены точные динамические теории, индуцируемые разбиением переменных в исходной теории на фоновую и конечную динамическую части. Установлена их некоторая неэквивалентность при различном выборе разбиваемых переменных. Обсуждаются калибровочная инвариантность, вытекающая из сдвигов 4-пространства, и динамические теории в ОТО.

Разбиение полевых переменных в некоторой исходной теории на фоновую и динамическую части имеет давнюю историю. В гравитации, начиная с работ [1], оно многократно использовалось для решения классических релятивистских задач и квантования слабого гравитаци-