т. е. все коэффициенты РШ существуют при $\nu<2$. Неприменимость ТВ РШ при $\nu\geqslant2$ естественна, так как при столь сильной особенности происходит для $\lambda<0$ падение на центр (дно ямы) [5, с. 145]. Однако вплоть до $\nu<3$ уровни энергии могут быть разложены в ряд по λ методами, отличными от ТВ РШ [8]. Аналитичность уровней энергии по λ имеет место и в четном случае при $3/2<\nu<2$; $\nu=2$, $|\lambda|<1/4$.

Отметим, что при переходе параметра возмущения ν через граничные значения $\nu=3/2$, $\nu=2$ точные четные и нечетные функции меняют свое поведение (3), (4) при $x=0$. У четной функции (4) при $\nu=3/2$ производная перестает быть квадратично интегрируемой, а у нечетной вместо (3) $\psi_{-\nu}(x)\backsim x^{\nu/4}\exp(-2\sqrt{\lambda}(\nu-2)^{-1}x^{-(\nu-2)/2}$, $x\to+0$, $\nu>2$, $\lambda>0$) [5, с. 215].

Так как основные выводы — существование МЭ и коэффициентов РШ при $\nu<3/2$ в четном случае, существование коэффициентов РШ при $\nu<2$ в нечетном — не зависят от величины $\gamma>0$, то они справедливы и для любого гладкого четного удерживающего потенциала. Отсюда следует реабилитация (вопреки [9]) теории возмущений для слабо сингулярных возмущений ($1\leqslant\nu<3/2$) четных состояний дискретного спектра и тем самым возможность рассматривать эту квантовомеханическую задачу как модель квантовой теории поля, где рядам РШ соответствуют фейнмановские диаграммы [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., 1982. Т. 4. Гл. 12. [2] Klauder J.//Acta Phys. Austriaca Suppl. 1973. 11. P. 341—387. [3] Ezawa H., Klauder J., Shepp L.//J. Math. Phys. 1975. 16. P. 783—799. [4] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р.//ТМФ. 1986. 68. С. 45—57. [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1974. [6] Копсон Э. Асимптотические разложения. М., 1966. С. 40. [7] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1984. § 29. [8] Harrell E.//Ann. Phys. 1977. 105. P. 379—406. [9] Calogero F.//J. Math. Phys. 1969. 10. P. 2191—2220.

Поступила в редакцию
24.06.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 6

УДК 530.12

О ТОЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЗАДАННОМ ФОНЕ

А. Н. Петров, А. Д. Попова

(ГАИШ)

Построены точные динамические теории, индуцируемые разбиением переменных в исходной теории на фоновую и конечную динамическую части. Установлена их некоторая неэквивалентность при различном выборе разбиваемых переменных. Обсуждаются калибровочная инвариантность, вытекающая из сдвигов 4-пространства, и динамические теории в ОТО.

Разбиение полевых переменных в некоторой исходной теории на фоновую и динамическую части имеет давнюю историю. В гравитации, начиная с работ [1], оно многократно использовалось для решения классических релятивистских задач и квантования слабого гравитационного поля. Не представляется возможным привести всю обширную библиографию по этому поводу, частично ее можно найти в [2].

Принцип построения динамической теории (т. е. теории динамического поля на заданном фоне той же природы) применим ко всякой теории вообще, описывающей одно поле или несколько и представленной в формализмах как второго, так и первого порядков. Но, пожалуй, наибольшую эффективность динамические теории приобретают в гравитации, поскольку фоновое гравитационное поле может трактоваться как искривленное 4-пространство, служащее ареной действия гравитационных динамических полей. Это позволяет рассматривать последние на одинаковых правах с негравитационными полями, например на фоне решения Шварцшильда или космологических моделей [3]. Динамические теории необходимы при квантовании гравитационного поля в полуклассическом приближении; об эффективном действии и конформной аномалии см. [4].

Мы не предполагаем динамическое поле малым и строим динамическую теорию точно, независимо от того, можно ли ее задать в замкнутой форме (см. для гравитации [5—7]) или только в виде суммы бесконечного степенного ряда по динамическим переменным. Такое построение разумно, когда можно выделить какую-либо гладкую или медленно меняющуюся часть поля в качестве фоновой, и тогда динамическая теория будет описывать весь круг явлений исходной теории с той же степенью полноты. Например, замкнутый мир Фридмана хорошо описывается динамической теорией [8].

В настоящей работе мы сделаем ряд утверждений относительно динамических теорий вообще, попутно иллюстрируя их на теории гравитационного поля или на системе взаимодействующих гравитационного и материального полей [7].

В разделе 1 рассматриваются свойства произвольной теории (не обязательно динамической) относительно переопределения полевых переменных. Преобразованная теория эквивалентна исходной.

В разделе 2 определен динамический лагранжиан, получены динамические уравнения и такая характеристика системы, как «фоновый ток», который соответствует варьированию динамического лагранжиана по фоновым переменным. Динамические теории, получаемые при различном выборе полевых переменных, оказываются в некотором смысле неэквивалентными. В гравитации на плоском 4-фоне тензоры энергии-импульса отличаются на дивергенцию, взятую от «суперпотенциала», в названии которого мы следуем сложившейся традиции. Упоминание о суперпотенциале в квадратичном приближении есть в [9]. Нами показано возникновение в точной теории членов, приводящих к суперпотенциалу.

В разделе 3 исследуется инвариантность динамических теорий гравитационного и материального полей относительно калибровочных преобразований, индуцируемых конечными сдвигами 4-пространства.

1. **Переопределение полей.** Рассмотрим систему полей f^A и P^a, где индексы A и a соответствуют произвольным, вообще говоря, разным трансформационным свойствам. Пусть поле P является вспомогательным, «внешним» по отношению к f, его мы будем использовать для получения некоторых характеристик системы. Примером такой ситуации является произвольное материальное поле, погруженное во внешнюю метрику.

Итак, рассмотрим некоторый функционал действия

$$S=\int d^4xL(f|P). \qquad (1)$$

Варьированием (1) получаем уравнения движения поля f (УД) и «внешний ток» (ВТ):

$$\frac{\delta L}{\delta f^A}=0, \tag{2}$$

$$\tau_a^f=\frac{\delta L}{\delta P^a}. \tag{3}$$

В случае, если поле P является метрическим тензором, ВТ (3) есть величина, пропорциональная тензору энергии-импульса.

Произведем преобразование переменных

$$f^A=f^A(\tilde{f},\ P) \tag{4}$$

и предположим, что это преобразование 1) имеет обратное, 2) не содержит производных от полей. К таким преобразованиям относится, например, переход от переменных с одним положением индексов к переменным с другим их положением.

УД и ВТ поля $\tilde{f}$ будут связаны с УД и ВТ поля f соотношениями

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta \tilde{f}^A}=\frac{\partial f^B}{\partial \tilde{f}^A}\frac{\delta L}{\delta f^B}\bigg|_{f=f(\tilde{f},P)}, \tag{5}$$

$$\tilde{\tau}_a^{\tilde{f}}=\left[\tau_a^f+\frac{\partial f^A}{\partial P^a}\frac{\delta L}{\delta f^A}\right]_{f=f(\tilde{f},P)}. \tag{6}$$

Очевидно, что теории полей f, P и $\tilde{f}$, P эквивалентны в том смысле, что УД (2) и (5) следуют одно из другого, а ВТ (3) и (6) совпадают при выполнении УД.

Сделанные утверждения в той же мере справедливы при замене переменных в динамических теориях.

2. **Динамические теории.** Вначале построим то, что мы будем называть динамической теорией. Пусть поле или система полей, объединенных под обозначением $\mathcal{Q}^A$, описывается действием

$$S=\int d^4x L(\mathcal{Q}). \tag{7}$$

Фиксируем определенным образом переменные $\mathcal{Q}$ (положение индексов, вес тензорных плотностей и т. п.). Далее, разобьем $\mathcal{Q}^A$ на фоновую Q^A и динамическую q^A части в смысле точного равенства:

$$\mathcal{Q}^A=Q^A+q^A. \tag{8}$$

Определим точно (без последовательных приближений) динамический лагранжиан поля q:

$$L^{\text{дин}}(q\,|\,Q)=L(Q+q)-L^0(Q)-L^1(q\,|\,Q), \tag{9}$$

где

$$L^0(Q)=L(Q), \tag{10}$$

$$L^1=q^A\frac{\delta L^0}{\delta Q^A}. \tag{11}$$

Теперь фоновые величины будут играть ту же роль, что и поле P в разделе 1.

Исходный лагранжиан $L(Q+q)$ с точностью до дивергенции может быть представлен в виде обобщенного ряда Тейлора с лагранжевыми производными по фоновым величинам (см., напр., [10]). Фактически (10) и (11) являются членами соответственно нулевого и первого порядков этого ряда.

Из (10) следуют фоновые уравнения движения (ФУД)

$$\frac{\delta L^0}{\delta Q^A}=0. \tag{12}$$

Заметим, что в (11) коэффициентом при q^A является левая часть (12), однако ФУД нельзя учитывать в $L^{\text{дин}}$ до варьирования.

Варьированием (9) по q и Q получаем соответственно динамические УД и «фоновый ток» (ФТ), аналогичный «внешнему току» в (3). Пользуясь очевидным свойством разбиения $\delta L/\delta Q=\delta L/\delta q$, представим УД и ФТ в виде

$$\frac{\delta L^{\text{дин}}}{\delta q^A}=\frac{\delta}{\delta Q^A}\left[L(Q+q)-L^0(Q)\right]=0, \tag{13}$$

$$\tau^q_A=\frac{\delta L^{\text{дин}}}{\delta Q^A}=\frac{\delta L^{\text{дин}}}{\delta q^A}-\frac{\delta}{\delta Q^A}\,q^B\frac{\delta L^0}{\delta Q^B}. \tag{14}$$

Здесь и далее будем считать, что лагранжева производная действует на все выражение справа от нее.

Из (13) и (14) видно, что ФТ является «источником» линейной части УД, которые можно переписать в виде

$$\frac{\delta}{\delta Q^A}\,q^B\,\frac{\delta}{\delta Q^B}\,L^0=-\tau^q_A. \tag{15}$$

Имея точную динамическую теорию, всегда можно построить приближенную заданного порядка. Первым членом разложения в $L^{\text{дин}}$ является квадратичный член в разложении исходного лагранжиана

$$L^2=\frac{1}{2}\,q^A\,\frac{\delta}{\delta Q^A}\,q^B\,\frac{\delta}{\delta Q^B}\,L^0. \tag{16}$$

Используя свойство перестановочности лагранжевых производных, варьированием (16) получим линейные УД поля q и квадратичный по q ФТ:

$$\frac{\delta}{\delta q^A}\,L^2=\frac{\delta}{\delta Q^A}\,q^B\,\frac{\delta}{\delta Q^B}\,L^0=0, \tag{17}$$

$$\tau^q_A=\frac{\delta}{\delta Q^A}\,L^2=\frac{1}{2}\,\frac{\delta}{\delta Q^A}\,q^B\,\frac{\delta}{\delta Q^B}\,q^C\,\frac{\delta}{\delta Q^C}\,L^0. \tag{18}$$

УД (17) и ФТ (18) можно получить иначе — это будут соответственно линейная и квадратичная части в разложении УД, следующих непосредственно из исходного лагранжиана (7).

Покажем теперь, какие отличия возникают в динамических лагранжианах и соответствующих им УД и ФТ, если две динамические теории построены для разного выбора независимых переменных в действии (7). Пусть

$$\mathcal{Q}^A_1=Q^A_1+q^A_1, \tag{19}$$

$$\mathcal{Q}^A_2=Q^A_2+q^A_2, \tag{20}$$

причем, конечно, $Q_2^A = Q_2^A(Q_1^B)$. Выпишем динамические лагранжианы для разбиений (19) и (20):

$$L_1^{\text{дин}} = L(Q_1^A + q_1^A) - L^0(Q_1^A) - q_1^A \frac{\delta}{\delta Q_1^A} L^0, \tag{21}$$

$$L_2^{\text{дин}} = L(Q_2^A + q_2^A) - L^0(Q_2^A) - q_2^A \frac{\delta}{\delta Q_2^A} L^0. \tag{22}$$

С целью сравнить выражения (21) и (22) выпишем (22) через динамические переменные q_1. Представим q_2 в виде ряда по q_1, учитывая, что $Q_2 = Q_2(Q_1)$:

$$\left.\begin{aligned} q_2^A &= \frac{\partial Q_2^A}{\partial Q_1^B} q_1^B + \alpha^A(q_1|Q_1), \\ \alpha^A &= \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 Q_2^A}{\partial Q_1^B \partial Q_1^C} q_1^B q_1^C + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 Q_2^A}{\partial Q_1^B \partial Q_1^C \partial Q_1^D} q_1^B q_1^C q_1^D + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Подставляя (23) в (22) и используя равенство $\frac{\partial Q_2^B}{\partial Q_1^A} \frac{\delta}{\delta Q_2^B} = \frac{\delta}{\delta Q_1^A}$, найдем разность выражений (21) и (22):

$$L_1^{\text{дин}}(q_1|Q_1) - L_2^{\text{дин}}(q_2(q_1|Q_1)|Q_2(Q_1)) = \beta^A(q_1|Q_1) \frac{\delta}{\delta Q_1^A} L^0, \tag{24}$$

где

$$\beta^A \equiv (\partial Q^A{}_1/\partial Q^B{}_2) \cdot \alpha^B.$$

УД, следующие из $L_1{}^{\text{дин}}$ и $L_2{}^{\text{дин}}$, в переменных q_1 будут отличаться на величину

$$\frac{\delta}{\delta q_1^A} L_1^{\text{дин}} - \frac{\partial q_2^B}{\partial q_1^A} \frac{\delta}{\delta q_2^B} L_2^{\text{дин}} = \frac{\partial \beta^B}{\partial q_1^A} \frac{\delta}{\delta Q_1^B} L^0.$$

Таким образом, отличия двух разбиений (19) и (20) в $L^{\text{дин}}$ и УД поля q пропорциональны ФУД (12) и исчезают при выполнении последних.

Покажем, что в ФТ разность (24) дает вклад, не исчезающий на ФУД (12) и УД (13). Возьмем лагранжеву производную по Q_1 от (24) и получим

$$\tau_{1A} - \frac{\partial Q_2^B}{\partial Q_1^A} \tau_{2B} = \frac{\partial q_2^B}{\partial Q_1^A} \frac{\delta}{\delta q_2^B} L_2^{\text{дин}} + \frac{\partial \beta^B}{\partial Q_1^A} \frac{\delta}{\delta Q_1^B} L^0 + \frac{\delta}{\delta Q_1^A} \beta^B \frac{\delta}{\delta Q_1^B} L^0. \tag{25}$$

Первый и второй члены справа в (25) пропорциональны соответственно УД и ФУД, а третий член, в котором β считается независимой от Q_1, является линейной частью оператора УД, примененного к β.

В случае «чистой» гравитации, описываемой действием Гильберта $-(1/2)\sqrt{-g}\,R$, в качестве динамических переменных используют, например, $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$, $\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}$ и т. п. В соответствующих динамических теориях тензоры энергии-импульса будут пропорциональны ФТ. Разность тензоров энергии-импульса двух динамических теорий, обусловленная третьим членом в (25), есть двойная ковариантная дивергенция, в случае плоского 4-фона — дивергенция от трехиндексной величины, так называемого суперпотенциала.

Подчеркнем, что факт возникновения членов (25) связан именно с различием в выборе разбиваемых переменных и выделением возникающей при этом разницы между динамическими лагранжианами, к появлению которой не может привести простое переопределение переменных $q_2=q_2(q_1|Q_1)$, описанное в разделе 1.

3. **Калибровочная инвариантность.** Рассмотрим какую-либо общековариантную теорию «гравитация»+«материя», описываемую одной и той же переменной Q. Покажем, что для нее и соответствующей динамической теории имеет место специфический вид калибровочной инвариантности.

Произведем следующее преобразование координат:

$$x'^{\alpha}=f^{\alpha}(x)=\left[\exp\left(\xi^{\beta}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\right)\right]x^{\alpha}, \tag{26}$$

где «exp» понимается как дифференциальный оператор, ξ — некоторый вектор, вообще говоря, не малый.

Стандартная операция, применяемая для вычисления дифференциалов Ли геометрических объектов, состоит в преобразовании (26) системы координат и последующего возвращения в точку, имеющую значение x в новой системе x'. Проделанная точно, а не в первом порядке по ξ, такая операция может интерпретироваться как конечный сдвиг пространства в направлении вектора ξ. Тогда преобразование какого-либо геометрического объекта Ω будет иметь вид

$$\Omega'(x)=(\exp\mathcal{L}_{\xi})\,\Omega(x)=\Omega(x)+\mathcal{L}_{\xi}\Omega+\frac{1}{2!}\mathcal{L}_{\xi}(\mathcal{L}_{\xi}\Omega)+\ldots, \tag{27}$$

где $\mathcal{L}_{\xi}$ обозначает обычный дифференциал Ли [11].

Итак, преобразования (26) генерируют преобразования переменных типа (27) в теории с действием (1):

$$f'=(\exp\mathcal{L}_{\xi})f,\quad P'=(\exp\mathcal{L}_{\xi})P. \tag{28}$$

Действие (1) остается инвариантным относительно (28), поскольку

$$L(f'|P')=L(\exp\mathcal{L}_{\xi}f|\exp\mathcal{L}_{\xi}P)=\exp\mathcal{L}_{\xi}L(f|P)=L(f|P)-(\xi^{\alpha}L)_{,\alpha}+$$
$$+\frac{1}{2!}(\xi^{\beta}(\xi^{\alpha}L)_{,\alpha})_{,\beta}-\ldots, \tag{29}$$

т. е. все члены бесконечного ряда, начиная со второго, образуют полную дивергенцию. Мы используем здесь и далее легко проверяемое свойство перестановочности оператора $\exp\mathcal{L}_{\xi}$ со знаком функции.

УД и ВТ остаются «калибровочно ковариантными», т. е. преобразуются сами в себя:

$$\frac{\delta L}{\delta f'}=\exp\mathcal{L}_{\xi}\frac{\delta L}{\delta f},\quad \frac{\delta L}{\delta P'}=\exp\mathcal{L}_{\xi}\frac{\delta L}{\delta P}.$$

В динамической теории с разбиением (8) калибровочные преобразования отнесем к динамическим переменным. Положим

$$q'=q+(\exp\mathcal{L}_{\xi}-1)(Q+q). \tag{30}$$

Это означает следующее соответствие с исходной теорией: величины $Q=Q+q$ и $Q'=Q+q'$ связаны преобразованием (28).

Покажем, как преобразуется наш набор динамических величин относительно преобразований (30). Для $L^{\text{дин}}$ имеем

$$L^{\text{дин}}(q') = L^{\text{дин}}(q) + (\exp \mathscr{L}_\xi - 1)\, L(Q+q) -$$
$$- [(\exp \mathscr{L}_\xi - 1)(Q^A + q^A)] \frac{\delta}{\delta Q^A} L^0(Q), \tag{31}$$

где второй член есть дивергенция (ср. с (29)), третий исчезает при выполнении ФУД. Таким образом, динамическое действие остается калибровочно инвариантным.

Динамические УД после подстановки (30),

$$\frac{\delta L^{\text{дин}}}{\delta q'^A} = \exp \mathscr{L}_\xi \frac{\delta L^{\text{дин}}}{\delta q^A} + (\exp \mathscr{L}_\xi - 1) \frac{\delta L^0}{\delta Q^A}, \tag{32}$$

остаются, очевидно, «калибровочно ковариантными» при выполнении ФУД.

Для ФТ получим

$$\tau_A(q') = \tau_A(q) + (\exp \mathscr{L}_\xi - 1) \frac{\delta L^0}{\delta Q^A} + (\exp \mathscr{L}_\xi - 1) \frac{\delta L^{\text{дин}}}{\delta q^A} -$$
$$- \frac{\delta}{\delta Q^A} [(\exp \mathscr{L}_\xi - 1)(Q^B + q^B)] \frac{\delta}{\delta Q^B} L^0. \tag{33}$$

В силу своей структуры (ср. с (15)) ФТ не является калибровочно инвариантным даже при выполнении ФУД и динамических УД, входящих соответственно во второй и третий члены (33). Четвертый член в (33) дает вклад, не исчезающий на УД и ФУД.

На первый взгляд могло бы показаться, что формулы (32), (33) и (5), (6) находятся в противоречии. Напомним, что последние связывают УД и ФТ, полученные непосредственными преобразованиями переменных в них, соответственно с УД и ФТ, выведенными из преобразованного лагранжиана. Здесь мы только непосредственно преобразуем сами УД и ФТ. Если вычислить те же величины из преобразованного $L^{\text{дин}}$ (31), то мы в точности установим их соответствие формулам (5), (6). Подчеркнем, что в (32), (33) речь идет о форм-инвариантности, т. е. инвариантности вида функции рассматриваемых динамических переменных.

Авторы выражают благодарность Л. П. Грищуку за полезные обсуждения и ряд критических замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Rosen N.//Phys. Rev. 1940. 57, N 1. P. 147—150, 150—153. [2] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М., 1977. Т. 1. [3] Биррелл Н., Девис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М., 1984. [4] Grishchuk L. P., Popova A. D.//Class. Quantum Grav. 1986. 3, N 4. P. 679—690. [5] Deser S.//Gen. Relat. and Grav. 1970. 1, N 1. P. 9—18. [6] Barnebey T. A.//Phys. Rev. 1974. D10, N 6. P. 1741—1748. [7] Grishchuk L. P., Petrov A. N., Popova A. D.//Comm. Math. Phys. 1984. 94, N 3. P. 379—396. [8] Грищук Л. П., Петров А. Н.//Письма в Астрон. журн. 1986. 12, № 6. С. 429—433. [9] Boulware P. C., Deser S.//Ann. of Phys. (N. Y.). 1975. 89, N 1. P. 193—240. [10] De Witt B. S. Dynamical theory of groups and fields. N. Y., 1965. [11] Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности. М., 1969. С. 34.

Поступила в редакцию
16.06.86