1967. [5] Bauer H. I., Bass H. E.//Phys. Fluids. 1973. 16, N 7. P. 988—996. [6] Коган Е. Я. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Куйбышев (КГПИ), 1984. [7] Осипов А. И., Уваров А. В.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физ. Астрон. 1984. 25, № 6. С. 74—77. [8] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., 1953.

Поступила в редакцию
10.06.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 6

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.14/17:528.21/22

ПЕРЕХОД ОТ РАЗЛОЖЕНИЯ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА К РАЗЛОЖЕНИЮ ПОТЕНЦИАЛА ПРОИЗВОЛЬНОГО ТЕЛА В ОБЛАСТИ ЕГО АНАЛИТИЧНОСТИ

Н. А. Чуйкова

(ГАИШ)

Найден переход от функции комплексного переменного $1/(1-z)$, определенной в двумерной звездной области, к обратному расстоянию $1/\Delta$, являющемуся функцией действительной переменной, заданной в трехмерном пространстве.

Общепринятое для обработки спутниковых данных представление гравитационного потенциала планеты $V=\int\int dm/\Delta$ в виде ряда по шаровым функциям (ряда Лапласа) заведомо применимо лишь вне сферы S, проходящей через самую возвышенную точку планеты, ибо оно получено на основе разложения обратного расстояния $1/\Delta$ в степенной ряд, сходящийся лишь вне S. Для изучения возможности применимости спутниковой модели потенциала внутри S, например на физических поверхностях планет, что является важной задачей практической гравиметрии, требуются дополнительные исследования [1—3]. Однако даже в случае сходимости ряда Лапласа на физической поверхности такое представление может быть не оптимальным (в смысле быстроты сходимости) в силу неортогональности системы шаровых функций на несферической поверхности. Конечно, можно перейти к разложению по системе функций, ортогональных в данной области наблюдений (например, функции Ламе вне эллипсоида или пространственный аналог полиномов Фабера вне произвольной уровенной поверхности). Однако такое представление очень сложно, а переход к нему от ряда Лапласа является весьма трудной и до сих пор не решенной в общем виде проблемой. Кроме того, разложение по шаровым функциям очень удобно для практических целей обработки и интерпретации как спутниковых, так и наземных гравиметрических наблюдений.

Поэтому желательно все же получить такое разложение потенциала по шаровым функциям, которое сходится всюду вне произвольной поверхности, причем коэффициенты его можно подобрать так, чтобы обеспечить максимальную скорость сходимости для заданной области наблюдений, и к которому было бы легко перейти от ряда Лапласа. Очевидно, такое разложение можно получить не на основе степенного ряда для обратного расстояния, а исходя из другого разложения, сходящегося в произвольной области. Ранее [4] нами было предложено для получения такого разложения использовать разложение Миттаг-Леффлера [5, с. 499] для аналитической функции в звездной области, которое отличается от степенного ряда наличием неких множителей

$C_k^{(n)} < 1$ при каждом коэффициенте k-й степени, зависящих от номера приближения n и от параметров области приближения.

Покажем ниже, что соответствующее разложение для обратного расстояния, сходящееся в произвольной области, отличается от общепринятого разложения по шаровым функциям, сходящегося лишь вне S, таким же множителем $C_k^{(n)}$:

$$\frac{1}{\Delta} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} \left(\frac{r'}{r}\right)^k P_k(\cos\psi), \tag{1}$$

где r', r — радиусы точек интегрирования и наблюдения, ψ — угловое расстояние между ними. Для этого нужно решить две задачи: 1) найти переход от функции $1/\Delta$ действительной переменной, определенной в трехмерном пространстве, к комплексной функции $f(z)$, определенной в двумерной звездной области; 2) определить формулы, связывающие коэффициенты разложения $1/\Delta$ по шаровым функциям с коэффициентами разложения Миттаг-Леффлера соответствующей комплексной функции $f(z)$.

Для решения первой задачи перейдем к формуле для обратного расстояния

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r\sqrt{1-2(r'/r)\cos\psi + (r'/r)^2}}$$

к комплексной переменной $z = (r'/r)e^{i\psi}$. Получим $r/\Delta = |1-z|^{-1}$.

Рассмотрим теперь множество, которое опишет точка z, когда точка интегрирования будет пробегать все тело планеты T, а точка наблюдения — пространство, внешнее к T. Это ограниченное (если $r \neq 0$) и замкнутое (в силу замкнутости T) односвязное множество, т. е. замкнутая область Д, не содержащая ни одного действительного положительного числа $z = x \geqslant 1$ (ибо при $\psi = 0$ $r > r'$) и ограниченная замкнутой однозначной кривой d, максимальный и минимальный радиусы которой соответствуют максимальному и минимальному радиусам R поверхности тела T:

$$|z_d|_{\max} = r'_{\max}/r_{\min} = R_{\max}/R_{\min},$$

$$|z_d|_{\min} = R_{\min}/r_{\min} = 1.$$

В этой звездной области Д с центром $z=0$ функция $1/(1-z)$ является аналитической и, следовательно, может быть представлена равномерно сходящимся в Д разложением Миттаг-Леффлера [5]:

$$\frac{1}{1-z} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} z^k, \tag{2}$$

где

$$C_k^{(n)} = \alpha^k k! \sum_{q=k}^{n} \frac{|S_q^{(k)}|}{q!} \beta^q, \tag{3}$$

$S_q^{(k)}$ — числа Стирлинга первого рода, $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1 - e^{-1/\alpha}$ — параметры, характеризующие область, приближающую Д.

Ниже приведем основные этапы решения второй задачи. Из сходимости последовательности аналитических функций (2) следует сходимость и последовательности модулей:

$$\frac{1}{|1-z|}=\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)}\left(\frac{r'}{r}e^{i\psi}\right)^k\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+S_n}\,, \tag{4}$$

где $S_n=\sum\limits_{m=1}^{2n} A_m^{(n)}(\psi)\left(\frac{r'}{r}\right)^m$,

$$A_m^{(n)}(\psi)=\sum_{l=\frac{m}{2}-\left\langle\frac{m}{2}\right\rangle}(2-\delta_{0l})\,C^{(n)}_{\frac{m}{2}-l}\,C^{(n)}_{\frac{m}{2}+l}\cos 2l\psi,$$

$$N=\min\left(\frac{m}{2},\ \frac{2n-m}{2}\right),$$

$\langle\ \rangle$ означает целую часть.

Используя формулу для производящей функции чисел Стирлинга [6]

$$\left(\ln\frac{1}{1-\beta}\right)^k=k!\sum_{q=k}^{\infty}\frac{|S_q^{(k)}|}{q!}\beta^q \tag{5}$$

и (3), получим, что

$$(C_1^{(n)})^k=C_k^{(n)}+\alpha^k\sum_{q=n+1}^{nk}\frac{k!}{q!}E_q^{(k)}\beta^q, \tag{6}$$

где $0<E_q^{(k)}\leqslant|S_q^{(k)}|$, причем $C_k^{(n)}\underset{n\to\infty}{\to}(C_1^{(n)})^k$.

Таким образом, подставляя в (4) $(C_1^{(n)})^k$ вместо $C_k^{(n)}$, мы получим разложение, приближающееся к r/Δ сверху, а затем, заменяя $(C_1^{(n)})^k$ на $C_k^{(n)}$, получим разложение, приближающееся к r/Δ снизу. Проведем все дальнейшие преобразования, заменяя везде $C_k^{(n)}$ на $(C_1^{(n)})^k$. Получим

$$\frac{r}{\Delta}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+S_n^*}\,, \tag{7}$$

где

$$S_n^*=\sum_{m=1}^{2n}(C_1^{(n)})^m\mathring{A}_m^{(n)}\left(\frac{r'}{r}\right)^m,$$

$$\mathring{A}_m^{(n)}=\sum_{l=\frac{m}{2}-\left\langle\frac{m}{2}\right\rangle}^{N}(2-\delta_{0l})\cos 2l\psi.$$

Рассматривая сначала (7) в области значений $|S_n^*|<1$ и разлагая в степенной ряд, получим после необходимых приведений

$$\frac{r}{\Delta} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (C_1^{(n)})^k \left(\frac{r'}{r}\right)^k P_k(\psi), \tag{8}$$

где

$$P_k(\psi) = \sum_{i=1}^{k} d_i \sum_{\Sigma l_j k_j = k;\; l_j \leqslant 2n} (i; k_1, \ldots, k_j)\, (\mathring{A}_{l_1}^{(n)})^{k_1} \ldots (\mathring{A}_{l_j}^{(n)})^{k_j}, \tag{9}$$

$$d_i = (-1)^{i+1} \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdots(2i-3)}{2\cdot 4\cdots 2i},$$

$$(i; k_1, \ldots, k_j) = \frac{i!}{k_1! \ldots k_j!}.$$

Теперь установим, что (9) определяет классический полином Лежандра. При $|z|<1$ аналитическая функция $1/(1-z)$ разлагается в степенной ряд вида

$$\frac{1}{1-z} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k.$$

Произведя выкладки, аналогичные предыдущим, получим, что при $r'/r < 1$

$$\frac{r}{\Delta} = \frac{1}{|1-z|} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{r'}{r}\right)^k P_k(\psi).$$

С другой стороны, известно, что при $r'/r<1$ существует единственное разложение

$$\frac{r}{\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^k P_k(\cos\psi),$$

где $P_k(\cos\psi)$ — ненормированный полином Лежандра. Следовательно, действительно, $P_k(\psi) = P_k(\cos\psi)$.

Если рассматривать (7) при $|S_n^*|>1$, то, выделяя в S_n^* такую постоянную часть C, что $S_n' = (S_n^* - C)/(1+C) < 1$, и разлагая (7) относительно S_n', получим тот же результат (8).

Заменяя в (8) $(C_1^{(n)})^k$ на $C_k^{(n)}$, получим то, что и требовалось доказать — разложение (1), приближающееся к $1/\Delta$ снизу.

Подставляя (1) или (8) в формулу для потенциала и интегрируя по массам планеты, получим представление

$$V(r, \varphi, \lambda) = \lim_{n\to\infty} f \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \left\{ \begin{matrix} C_k^{(n)} \\ (C_1^{(n)})^k \end{matrix} \right\} \frac{1}{r^{k+1}} (A_{km} \cos m\lambda + B_{km} \sin m\lambda)\, P_{km}(\sin\varphi),$$

равномерно сходящееся во всем внешнем относительно физической поверхности планеты пространстве, которое отличается от ряда Лапласа множителями $C_k^{(n)}$ или $(C_1^{(n)})^k$. Наличие первого из них обеспечивает сходимость снизу, второго — сверху. Величины этих множителей зависят от вида физической поверхности планеты через параметр α (3).

О выборе этого параметра с целью оптимального представления потенциала будет сказано в следующей статье. Здесь же дадим оценки величин коэффициентов $C_k^{(n)}$ и отличие их от $(C_1^{(n)})^k$ для конкретного номера приближения n.

Имеем на основе (3), (5) и (6):

$$0<(\alpha\beta)^k\leqslant C_k^{(n)}<(C_1^{(n)})^k<\lim_{n\to\infty} C_k^{(n)}=1.$$

В частности,

$$C_n^{(n)}=(\alpha\beta)^n; \quad C_1^n=\alpha\sum_{q=1}^{n}\frac{\beta^q}{q}.$$

Более детальные оценки для больших n можно получить, используя асимптотические оценки для $S_q^{(k)}$. Получим при $k=0$ $(\ln n)$

$$1-k\beta^{n+1}\alpha e^{1/\alpha}(\alpha\ln n)^{k-1}/n<C_k^{(n)}<1-k\beta^n(\alpha\ln n)^{k-1}/(n+1), \tag{10}$$

при этом

$$(C_1^{(n)})^k-C_k^{(n)}<k\beta^{n+1}\alpha^k e^{1/\alpha}\underset{n\to\infty}{\to}0$$

тем быстрее, чем меньше β и, следовательно, больше α.

При $k\sim n$ найдем

$$(\alpha\beta)^k<C_k^{(n)}<(k/2)^{n-k}\alpha^k\beta^n, \tag{11}$$

при этом

$$(C_1^{(n)})^k-C_k^{(n)}\underset{n\to\infty}{\to}0$$

тем быстрее, чем меньше α.

Теперь оценим зависимость $C_k^{(n)}$ от α. Из (10) и (11) видно, что с ростом α растет и $C_k^{(n)}$, но даже при $\alpha\to 1$ для $k\sim n$ $C_k^{(n)}$ не стремится к 1, ибо при этом $\beta<1-1/e$. Преобразуя (10) и (11), получим, что при малом k

$$1-k\alpha^k e^{1/\alpha-(n+1)e^{-1/\alpha}}<C_k^{(n)}<1-ke^{-n/e}/(n+1),$$

а при $k\sim n$

$$\alpha^k e^{-ke^{-1/\alpha}}<C_k^{(n)}<(k/2)^{n-k}e^{-k/e}.$$

Из анализа этих формул видим, что отличие верхней границы значений $C_k^{(n)}$ от 1 тем меньше, чем больше n и меньше k, вне зависимости

$\alpha=0,36$				$\alpha=0,1$	
n	k	$C_k^{(n)}$	$(C_1^{(n)})^k$	$C_k^{(n)}$	$(C_k^{(n)})^k$
2	1	0,51		0,1	
	2	0,12	0,26	0,01	0,01
10	1	0,86		0,29	
	10	0,00002	0,2	10^{-10}	$0,4\cdot 10^{-5}$
30	1	0,97		0,40	
	30	10^{-14}	0,4	10^{-30}	10^{-12}
100	1	0,9999		0,52	
	100	10^{-47}	0,99	10^{-100}	$0,3\cdot 10^{-28}$

от α, нижняя же граница определяется α и растет с ростом α также тем быстрее, чем больше n и меньше k.

Для иллюстрации приведем значения $C_k^{(n)}$ для некоторых α, n, k (таблица). Видно, что наличие данных множителей сильно сглаживает ряд Лапласа, особенно гармоники высоких степеней.

В заключение добавим, что в силу теоремы Вейерштрасса о дифференцировании равномерно сходящейся последовательности аналитических функций всюду вне физической поверхности будут равномерно сходиться и следующие последовательности для любой производной потенциала:

$$\frac{\partial V}{\partial l}(r, \varphi, \lambda) = \lim_{n\to\infty} f \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \left\{\frac{C_k^{(n)}}{(C_1^{(n)})^k}\right\} \frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{P_{km}(\sin\varphi)}{r^{k+1}}(A_{km}\cos m\lambda + B_{km}\sin m\lambda)\right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Антонов В. А., Холшевников К. В.//Астрон. журн. 1980. 57. С. 1323—1330. [2] Чуйкова Н. А.//Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1980. № 4. С. 54—63. [3] Чуйкова Н. А.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физ. Астрон. 1984. 25, № 1. С. 22—28. [4] Чуйкова Н. А.//Там же. 1985. 26, № 5. С. 77—81. [5] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М., 1968. Т. 2. [6] Справочник по специальным функциям. М., 1979.

Поступила в редакцию
10.06.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1987. Т. 28, № 6

УДК 521.13

ВЕКОВЫЕ И ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ОРБИТЫ КРАТНОЙ СИСТЕМЫ ξU.Ma.

|А. А. Орлов|, **Н. А. Соловая**

(ГАИШ)

Вычисляются возмущения внутренней орбиты кратной звездной системы ξU.Ma. при помощи формул, развитых авторами ранее. Приведены средние изменения элементов e_1, Ω_1 и I_1 за сто лет. Результаты показывают, что возмущения элементов внутренней орбиты значительны, и их нужно учитывать.

Настоящая статья является продолжением работы [1] и посвящена приложению теории движения тройных звезд, построенной в работе [2], к исследованию вековых и долгопериодических возмущений орбиты тесной пары ξ U. Ma., имеющей период 1,8 года. В работе [1] указывалось, что Хейнтц [3], анализируя наблюдения тройной звездной системы ξ U. Ma. за длительный промежуток времени, обнаружил изменения внешней орбиты. Изменения внутренней орбиты этой системы ему обнаружить не удалось в основном, по-видимому, потому, что период наблюдений тесной спектрально-двойной пары слишком мал.

Целью настоящей работы является выяснение характера эволюции орбиты рассматриваемой тесной пары, изучение вековых и долгопериодических возмущений периастра и узла. Результаты такого исследования можно будет в дальнейшем использовать для определения наиболее благоприятных условий получения возмущений тесной пары из наблюдений.