УДК 530.12:531.51

КОСМОЛОГИЯ В ТЕОРИИ ЭЙНШТЕЙНА—КАРТАНА. II. НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

В. А. Короткий, Ю. Н. Обухов

(кафедра теоретической физики)

Исследован класс космологических моделей со спинурующей жидкостью. Получены анизотропное обобщение модели де Ситтера с кручением, обобщенные анизотропные модели с космологической постоянной и стационарная модель с вращением без нарушения причинности.

В данной работе исследуется применение модели спинурующей жидкости в космологических задачах в рамках ТЭК. Наличие выделенного направления, обусловленного спином, с необходимостью приводит к рассмотрению анизотропных космологических моделей с вращением. Поэтому будем искать решение системы гравитационных уравнений ТЭК [1] в классе анизотропных метрик вида

$$dS^2 = dt^2 - R^2(t) (dx^2 + ka^2(x) dy^2) - r^2(t) dz^2 - 2R(t)b(x) dy dt. \quad (1)$$

Эта метрика является естественным нестационарным обобщением семейства моделей с вращением типа Гёделя [2, 3]. Нетрудно видеть, что метрика (1) характеризуется тензором вращения

$$\omega_{\alpha\beta} = Rb' \delta_{[\alpha}^2 \delta_{\beta]}^1, \quad (2)$$

тензором сдвига $\sigma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} - (1/3)\theta h_{\alpha\beta}$, где

$$\sigma_{11} = -\lambda R^2/3; \quad \sigma_{22} = -\lambda \frac{1(ka^2 + b^2) R^2}{3}; \quad \sigma_{33} = \frac{2r^2}{3} \lambda, \quad \lambda = \frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{r}}{r}, \quad (3)$$

и расширением

$$\theta = \theta_{\alpha}^{\alpha} = 2 \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{r}}{r}. \quad (4)$$

Как принято, движение среды рассматриваем в сопутствующих координатах, т. е. вектор скорости $u^{\mu} = \delta_0^{\mu}$. Метрика (1) интересна тем, что «сопутствующая» жидкость в ней имеет нетривиальное ускорение:

$$u^{\mu} \tilde{\nabla}_{\mu} u_{\alpha} = -b \dot{R} \delta_{\alpha}^2, \quad (5)$$

тем самым, в силу доказанной в [1] теоремы спин жидкости не сохраняется в отличие от рассматривавшихся ранее космологических моделей. Из условия пространственной однородности модели имеем

$$b = \sqrt{\sigma} a, \quad a = Ae^{mz}, \quad (6)$$

где σ, A, m — постоянные параметры.

Выберем ортонормированную гравитационную тетраду в виде

$$h_0^{\hat{0}} = 1; \quad h_1^{\hat{1}} = R; \quad h_2^{\hat{2}} = \sqrt{ka^2 + b^2} R; \quad h_3^{\hat{3}} = r; \quad h_2^{\hat{0}} = -bR. \quad (7)$$

Здесь и далее шляпка ставится над тетрадными индексами.

Очевидная выделенность координаты z в (1) приводит к естественному предположению, что спин источника направлен по оси z ,

$$\mu_{23} = \mu_{13} = 0; \mu_{12} = \mu(t). \quad (8)$$

Это не нарушает однородности модели. Тогда из уравнений Эйнштейна—Картана получаем, что кручение имеет единственную компоненту

$$Q_{\hat{0}\hat{1}\hat{2}} = Q(t). \quad (9)$$

Вычислим коэффициенты локальной лоренцевой связности для (1), (9):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\hat{0}\hat{0}}^{\hat{2}} &= \Gamma_{\hat{2}\hat{1}}^{\hat{1}} = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{k+\sigma}} \frac{\dot{R}}{R}; & \Gamma_{\hat{2}\hat{3}}^{\hat{3}} &= \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{k+\sigma}} \frac{\dot{r}}{r}; \\ \Gamma_{\hat{1}\hat{1}}^{\hat{0}} &= \Gamma_{\hat{2}\hat{2}}^{\hat{0}} = \frac{\dot{R}}{R}; & \Gamma_{\hat{3}\hat{3}}^{\hat{0}} &= \frac{\dot{r}}{r}; & \Gamma_{\hat{2}\hat{2}}^{\hat{1}} &= -\frac{m}{R}; \\ \Gamma_{\hat{2}\hat{0}\hat{1}} &= \Gamma_{\hat{0}\hat{1}\hat{2}} = \Gamma_{\hat{2}\hat{1}\hat{0}} = M/R + Q, \end{aligned} \quad (10)$$

где введено обозначение $M \equiv \frac{m\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{k+\sigma}}$.

Из уравнения движения жидкости [4] с учетом (8), (10) получаем $\mu = \text{const}$, $\rho = \rho_0/(R^2/r)$.

Как следствие уравнений ТЭК для кручения, с учетом (11) имеем

$$Q = \frac{\kappa}{2} \rho \mu = Q_0 \frac{1}{R^2 r}. \quad (12)$$

Тогда система уравнений Эйнштейна для метрики (1) запишется так:

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma}{k+\sigma} \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{r}}{r} \right) + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k+\sigma}{k+\sigma} \frac{\dot{R}\dot{r}}{Rr} + \frac{4MQ}{R} + Q^2 - \\ - \frac{m^2(4k+\sigma)}{4R^2(k+\sigma)} = \kappa(\varepsilon - \Lambda), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{k}{k+\sigma} \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{R}\dot{r}}{Rr} \right) - \frac{2MQ}{R} - \frac{M^2}{R^2} - Q^2 = -\kappa(\rho + \Lambda), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{r}}{r} - \frac{\sigma}{(k+\sigma)} \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k-\sigma}{k+\sigma} \frac{\dot{R}\dot{r}}{Rr} - 2 \frac{MQ}{R} - \frac{M^2}{R^2} - Q^2 = \\ = -\kappa(\rho + \Lambda), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{2k}{(k+\sigma)} \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{k}{(k+\sigma)} \frac{\dot{R}^2}{R^2} - Q^2 - \frac{m^2(3\sigma+4k)}{4R^2(k+\sigma)} = -\kappa(\rho + \Lambda), \quad (16)$$

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{k+\sigma}} \frac{M}{R} \left(\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{r}}{r} \right) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{k+\sigma}} \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{r}}{r} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\dot{R}\dot{r}}{Rr} \right) = 0. \quad (18)$$

Здесь Λ — космологическая постоянная.

Рассмотрим некоторые наиболее интересные частные решения системы уравнений (13)—(18).

1. При $m=0$ условия совместности уравнений (14)—(16), (18) имеют вид

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\dot{R}\dot{r}}{Rr}, \quad \frac{\ddot{r}}{r} = \frac{\dot{R}^2}{R^2}. \quad (19)$$

Общее решение системы уравнений (19):

$$R = R_0(\varphi_1)^{2/3}, \quad r = r_0\varphi_2/(\varphi_1)^{1/3}, \quad (20)$$

где функции φ_1 и φ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{3}{2} \omega \varphi_2; \quad \dot{\varphi}_2 = S \cdot \frac{3}{2} \omega \varphi_1, \quad S = \pm 1.$$

При $S=1$

$$\varphi_1 = c_1 \operatorname{sh} \left(\frac{3}{2} \omega t \right) + c_2 \operatorname{ch} \left(\frac{3}{2} \omega t \right), \quad (21)$$

при $S=-1$

$$\varphi_1 = c_1 \sin \left(\frac{3}{2} \omega t \right) + c_2 \cos \left(\frac{3}{2} \omega t \right), \quad (22)$$

где $c_1, c_2, \omega > 0$ — произвольные константы.

Частным случаем (20) является изотропное решение

$$R = r = R_0 e^{\omega t}. \quad (23)$$

При этом кручение, плотность числа частиц, плотность энергии и давление будут соответственно

$$Q = \frac{Q_0}{R_0^3} e^{-3\omega t}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{R_0^3} e^{-3\omega t}, \quad (24)$$

$$\varepsilon - \Lambda = \frac{3k\omega^2}{\kappa(k+\sigma)} + \frac{Q_0^2}{\kappa R_0^6} e^{-6\omega t}, \quad (25)$$

$$p + \Lambda = -\frac{3k\omega^2}{\kappa(k+\sigma)} + \frac{Q_0^2}{\kappa R_0^6} e^{-6\omega t}.$$

При $\Lambda=0$ уравнение состояния (25) с течением времени меняется от $p=\varepsilon$ до $p=-\varepsilon$. Точка $t=-\infty$ является сингулярной.

Решение (23) совпадает с решением де Ситтера с точностью до координатного преобразования. Данная модель представляет интерес в связи с рассмотрением дофридмановской эволюции ранней Вселенной, которая, как предполагается [5—7], должна содержать деситтеровскую стадию расширения. Отметим также интересные попытки построения так называемой полной космологической модели [8]. Обобщение модели де Ситтера в ТЭК ранее рассматривалось в [9] в рамках теории стационарной Вселенной. Хотя формально у нас, как и в [9], эффективная плотность энергии и давление удовлетворяют вакуумному уравнению состояния $p_{\text{эфф}} + \varepsilon_{\text{эфф}} = 0$ (см. (25)), динамика физических параметров материи существенно иная. Принципиально важным при этом является использование корректных уравнений движения спи-

на, что позволило получить динамику кручения (24) и как следствие найти временную эволюцию давления и плотности энергии. Отсутствие динамики спина привело в [9] к нарушению закона сохранения энергии, в то время как в данной модели ε и ρ удовлетворяют обычному уравнению непрерывности $u^\mu \nabla_\mu \varepsilon + (\varepsilon + p) \nabla_\mu u^\mu = 0$.

Общий случай решения (20) интересен тем, что содержит анизотропное обобщение модели де Ситтера. Для наглядности выпишем типичное анизотропное решение, положив в (20) и (21) $c_1 = 0$, $S = 1$:

$$R = R_0 \left(\operatorname{ch} \left(\frac{3}{2} \omega t \right) \right)^{2/3},$$

$$r = r_0 \frac{\left| \operatorname{sh} \left(\frac{3}{2} \omega t \right) \right|}{\left(\operatorname{ch} \left(\frac{3}{2} \omega t \right) \right)^{1/3}}.$$
(26)

При $t \rightarrow \pm \infty$ происходит «изотропизация» модели, которая асимптотически переходит в деситтеровскую (23): $r \rightarrow R \rightarrow e^{\omega t}$ (параметр анизотропии $\lambda(t) = |\operatorname{sh}(3\omega t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm \infty$). Заметим, что масштабный фактор R нигде не обращается в нуль. Тем не менее решение (26) сингулярно, поскольку при $t=0$ получим $r=0$ (в отличие от (25)), и

$$Q = \frac{4Q_0}{R_0^4 r_0^2 \operatorname{sh}^2(3\omega t)}; \quad \rho = \frac{4\rho_0}{R_0^4 r_0^2 \operatorname{sh}^2(3\omega t)}$$

$$\varepsilon - \Lambda = \frac{3k\omega^2}{\kappa(k + \sigma)} + \frac{4Q_0^2}{\kappa R_0^4 r_0^2 \operatorname{sh}^2(3\omega t)},$$

$$p + \Lambda = -\frac{3k\omega^2}{\kappa(k + \sigma)} + \frac{4Q_0^2}{\kappa R_0^4 r_0^2 \operatorname{sh}^2(3\omega t)}.$$
(27)

Отметим, что кручение в рассматриваемом случае ($m=0$) не только не предотвращает сингулярность, но усугубляет ее, приводя к бесконечным значениям давления и плотности энергии.

2. Случай $m=0$, $\sigma=0$, $R \neq 0$ исследовался в [10–12], хотя в ряде работ (напр., [10]) некорректно допускались решения с несохраняющимся спином. Из (5)–(6) при $\sigma=0$ имеем, однако, что ускорение равно нулю и, следовательно, спин сохраняется.

В данном пункте мы ограничимся анализом особенностей решений, обусловленных ненулевой космологической постоянной.

Введем переменную $\varphi^3 = R^2 r$ и зададим уравнение состояния в виде $p = \gamma \varepsilon$. Тогда уравнения Эйнштейна (14)–(18) сводятся к одному:

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + \frac{(1+3\gamma)}{2} \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} + \frac{(\gamma-1)}{2} \left(1 - \frac{B^2}{3} \right) \frac{Q_0^2}{\varphi^6} + \frac{(1+\gamma)\kappa}{2} \Lambda = 0,$$
(28)

где константа $B = \lambda/Q$.

При $0 \leq \gamma < 1$ и произвольном Λ решение (28) несингулярно, если $B < \sqrt{3}$. Отметим, что при положительном Λ (как в метрике Гёделя) уравнение (28) описывает осциллирующую несингулярную космологическую модель. Например, при $\gamma=0$

$$(\varphi_{\min})^{3/2} = \frac{c - \sqrt{c^2 - (3/8)(3 - B^2)\Lambda}}{(3/4)\Lambda}; \quad (\varphi_{\max})^{3/2} =$$

$$= \frac{c + \sqrt{c^2 - (3/8)(3 - B^2)\Lambda}}{(3/4)\Lambda}, \quad c^2 > (3/8)(3 - B^2)\Lambda.$$

При $\gamma=1$ кручение не влияет на динамику модели (см. (28)), которая определяется в этом случае величиной Λ :

$$\varphi = \varphi_0 (c_1 t + c_2)^{1/3}, \quad \Lambda = 0,$$

$$\varphi = \varphi_0 (\sin \sqrt{3\kappa\Lambda t + c})^{1/3}, \quad \Lambda > 0,$$

$$\varphi = \varphi_0 (\operatorname{ch} \sqrt{-3\kappa\Lambda t})^{1/3}, \quad \Lambda < 0.$$

Отрицательный космологический член, как и следовало ожидать, предотвращает сингулярность.

3. Наконец, рассмотрим стационарные модели с вращением: $\dot{r} = \dot{R} = 0$, $m \neq 0$, $\sigma \neq 0$. Сравнивая (14)–(15) с (16) (уравнения (17)–(18) удовлетворяются тождественно), найдем

$$Q = \frac{m(\sigma + 2k)}{2\sqrt{\sigma(k + \sigma)}}. \quad (29)$$

Таким образом, угловая скорость жесткого вращения материи определяется кручением (29), а следовательно, спином жидкости.

Физические параметры материи имеют вид

$$\varepsilon = \frac{m^2(k + \sigma)}{\kappa\sigma} + \Lambda, \quad \rho = \frac{m^2(k + \sigma)}{\kappa\sigma} - \Lambda, \quad (30)$$

$$\mu\rho = \frac{m(\sigma + 2k)}{\kappa\sqrt{\sigma(k + \sigma)}}. \quad (31)$$

При $\Lambda=0$ формула (30) задает предельно жесткое уравнение состояния $\rho = \varepsilon$.

В отсутствие спина и кручения из (29)–(30) имеем

$$k/\sigma = -1/2, \quad \varepsilon = 2\Lambda \quad (\rho = 0), \quad (32)$$

т. е. решение Гёделя [13]. Как известно, вселенная Гёделя содержит замкнутые времениподобные линии, поскольку из (32) $k < 0$ [3].

Однако в ТЭК в найденном решении на параметр k (как и σ) ограничений нет. Поэтому, полагая

$$k \geq 0, \quad (33)$$

мы получаем вращающуюся космологическую модель без нарушения причинности.

Таким образом, спинирующая жидкость в ТЭК является реалистическим источником, который позволяет построить космологические модели с вращением типа Гёделя без замкнутых времениподобных линий*.

Итак, в данной статье рассмотрен класс космологических моделей в ТЭК с источником в виде спинирующей жидкости. Среди полученных решений — анизотропное обобщение модели де Ситтера с кручением, обобщенные анизотропные модели [10–12] с ненулевой космологиче-

* После завершения работы нам стала известна статья [14], в которой в рамках другого подхода был также получен указанный новый эффект кручения.

ской постоянной и стационарная модель с вращением без нарушения причинности. Проведенное исследование позволяет уточнить роль кручения в космологии: оно может и устранять сингулярность (28), и усиливать ее (26), (27); с другой стороны, наличие кручения может улучшить причинную структуру пространства-времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Короткий В. А., Обухов Ю. Н. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физ. Астрон. 1987, 28, № 4. С. 6—11. [2] Van Stockum W. J. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1937. 57. P. 135. [3] Rauchaudhuri A. K., Thakurta S. N. // Phys. Rev. 1980. D22. P. 802—806. [4] Короткий В. А., Обухов Ю. Н. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физ. Астрон. 1987, 28, № 6. С. 3—8. [5] Guth A. H. // Phys. Rev. 1981. D23. P. 347—356. [6] Linde A. D. // Nucl. Phys. 1985. B252. P. 153—159. [7] Starobinski A. A. // Phys. Lett. 1980. B91. P. 99—102. [8] Гришук Л. П., Зельдович Я. Б. // Тр. 2-го семинара «Квантовая теория гравитации, 1981». М., 1982. С. 39. [9] Нургалиев И. С., Пономарев В. Н. // Изв. вузов. Физика. 1982. № 10. С. 63—65. [10] Kuchowicz B. // J. Phys. A. 1975. 8. P. L29—33; Acta Phys. Polon. 1975. B6. P. 173—196; Preprint N 51. 1975. Inst. Astr. Pol. Acad. Sci. [11] Корczynski W. // Phys. Lett. 1972. A39. P. 219—220; 1973. A43. P. 63—64. [12] Tafel J. // Phys. Lett. 1973. A45. P. 341—343; Acta Phys. Polon. 1975. B6. P. 537—554. [13] Gödel K. // Rev. Mod. Phys. 1949. 21. P. 447—450. [14] Bedran M. L., Vaidia E. P. V., Som M. M. // Nuovo Cim. 1985. B87. P. 101—108.

Поступила в редакцию
04.06.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 1

УДК 530.12:531.18

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЦЕНТРА СИСТЕМЫ СОБЫТИЙ

Н. П. Клепиков

(кафедра теоретической физики)

Условие выполнения обобщенного соотношения Осборна и правильной коммутации коллективного времени с импульсом, энергией и коллективной координатой системы приводит к единственности ранее найденных выражений координат центра системы событий.

Координаты центра R , T системы N событий, имеющих координаты r_a , t_a и происходящих с частицами, имеющими импульсы p_a и энергии E_a , были найдены в [1—3]. Они имеют вид ($c=1$)

$$R = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^N \left\{ r_a \left(E_a - \frac{P p_a}{E+M} \right) + P r_a \left(\frac{1}{E+M} \left(p_a + \frac{P E_a}{M} \right) - \alpha_a \frac{P}{M} \right) - t_a \left(p_a + \frac{P}{M} \left(\frac{P p_a}{E+M} - \alpha_a E \right) \right) \right\}, \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{M^2} \sum_{a=1}^N \{ P r_a (E_a - E \alpha_a) + t_a (E^2 \alpha_a - P p_a) \}, \quad (2)$$

где $E = \sum_{a=1}^N E_a$, $P = \sum_{a=1}^N p_a$, $M^2 = E^2 - P^2$, а α_a — неопределенные кон-