АСТРОНОМИЯ

УДК 521.14/17:528.21/22

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ РАЗЛОЖЕНИЯ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ДЛЯ ЗАДАННОЙ ОБЛАСТИ НАБЛЮДЕНИЯ

Н. А. Чуйкова

(ГАИШ)

Определены параметры разложения Миттаг-Леффлера, которые позволяют получить оптимальное разложение обратного расстояния, сходящегося быстрее универсального более чем в e^{20/l_1^2} раз, где l_1 — расстояние ближайших гор от точки наблюдения, и быстрее сходящегося в данной точке ряда Лапласа.

Полученное нами ранее [1, 2] представление внешнего потенциала притяжения планеты в виде следующего разложения по шаровым функциям:

$$V(r, \varphi, \lambda) = f \int \frac{dm}{\Delta} = \lim_{n\to\infty} f \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \frac{C_k^{(n)}}{r^{k+1}} (A_{km} \cos m\lambda +$$

$$+ B_{km} \sin m\lambda) P_{km}(\sin\varphi), \qquad (1)$$

равномерно сходящегося всюду вне физической поверхности планеты, отличается от общепринятого ряда Лапласа наличием множителей

$$C_k^{(n)} = \alpha^k k! \sum_{q=k}^{n} \frac{S_q^{(k)}}{q!} \beta^q < 1,$$

зависящих от параметров $\alpha < 1$ и $\beta = 1 - e^{-1/\alpha}$. Здесь $S_q^{(k)}$ — числа Стирлинга первого рода.

В предлагаемой работе поставлена задача так подобрать параметр α для заданной области наблюдения (r, φ, λ), чтобы скорость сходимости разложения (1) была в ней максимальна. Очевидно, это будет достигнуто в том случае, если используемое для получения (1) разложение обратного расстояния

$$\frac{1}{\Delta} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} \left(\frac{r'}{r}\right)^k P_k(\cos\psi), \qquad (2)$$

где r', r — радиусы точек интегрирования и наблюдения, ψ — угловое расстояние между ними, будет также иметь максимальную скорость равномерной сходимости. В случае, когда $r' \leqslant r$, т. е. для потенциала притяжения масс планеты, лежащих ниже сферы S, проходящей через точку наблюдения, известно, что максимальная скорость сходимости, как равномерной, так и в среднем, обеспечивается для $1/\Delta$ степенным рядом, т. е. (2) при $C_k^{(n)} = 1$. Таким образом, вопрос об оптимальном выборе параметра α встает только при $r' > r$, т. е. при рассмотрении потенциала притяжения только тех масс планеты, которые выступают за сферу S.

Разложение (2) получено нами [2] на основе следующего разложения Миттаг-Леффлера [3, с. 499] для аналитической функции $1/(1-z)$, где $z=(r'/r)e^{i\psi}$, в звездной области:

$$\frac{1}{1-z}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}z^k \tag{3}$$

и применимо в произвольной области $Д(z)$, являющейся частью прямолинейной звезды функции $1/(1-z)$. Рассмотренный в [2] переход от функции $1/\Delta$ действительной переменной к функции $1/(1-z)$ комплексной переменной позволяет заключить, что исследуемую область сходимости $Д(z)$ можно представить в виде части комплексной плоскости, ограниченной дугой сферы $z=e^{i\psi}$ и кривой $z=(1+h)e^{i\psi}$, где $h=h(\psi)=\max|r'-r|/r$ для данного ψ (рис. 1).

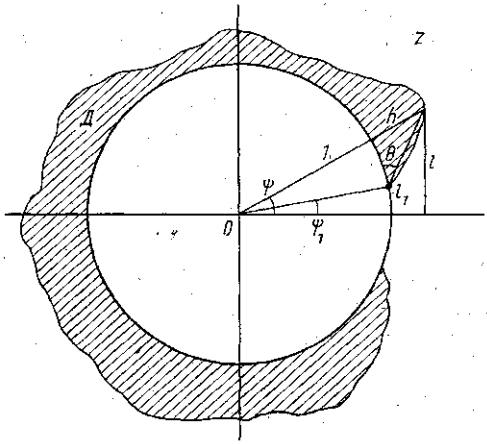

Рис. 1

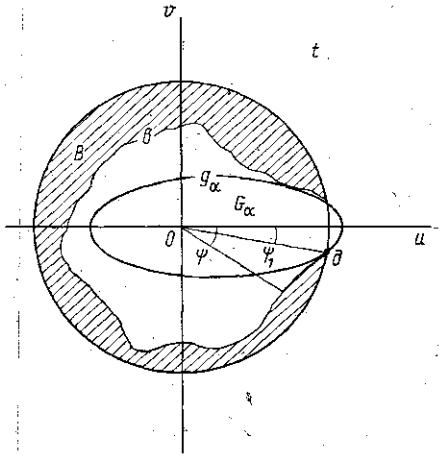

Рис. 2

Следовательно, задача сводится к тому, чтобы получить наилучшее равномерное представление (3) в области $Д(z)$. Однако тот выбор параметра α, который предложен в [3] и использован в [1], хотя и универсален, ибо позволяет получить разложение для $1/(1-z)$ по степеням z, равномерно сходящееся во всей комплексной плоскости z, за исключением отрезка действительной оси $z=x\geqslant 1$, но он не обеспечивает, именно в силу своей универсальности, максимальной скорости равномерной сходимости для $1/(1-z)$ в заданной конкретной области $Д(z)$. Кроме того, выбор α в [3] зависит также от номера приближения n, а именно $\alpha_n\underset{n\to\infty}{\to}0$ таким образом, чтобы получить приближение к исходной функции во вложенных областях, приближающихся с ростом n к звезде функции. Однако нам необходимо иметь для любого n приближение, справедливое во всей области $Д(z)$, и, следовательно, параметр α должен зависеть только от $Д(z)$.

Поэтому мы предложим здесь другой, отличный от предложенного в [3], выбор параметра α, удовлетворяющий перечисленным выше требованиям. Воспользуемся при этом методом Пенлеве, изложенным в [3, с. 495], изменив его для указанной цели. Идея его заключается в том, что находится такое конформное преобразование области $Д$,

которое связывает функцию $1/(1-z)$, $z\in Д$, с функцией $f(\tau)$, аналитической внутри круга. Тогда, используя разложение $f(\tau)$ внутри круга в степенной ряд (который дает наилучшее равномерное приближение f), можно не только перейти к наилучшему представлению функции $1/(1-z)$ внутри $Д$, но и оценить его ошибку.

Ниже изложим основные этапы примененного метода и полученные результаты. Подвергая $Д(z)$ инверсному преобразованию $t=1/z=u+iv$, получим область $B(t)$ (рис. 2), внешняя граница которой $t=e^{-i\psi}$ соответствует внутренней границе $Д$ $z=e^{i\psi}$, а внутренняя граница $b: t=1/(1+h)e^{-i\psi}$ — внешней границе $Д$ $z=(1+h)e^{i\psi}$.

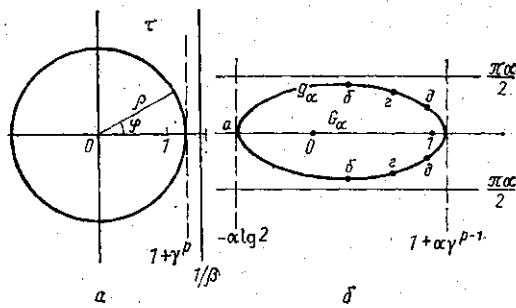

Рис. 3

Рассмотрим теперь функцию $f(t)=1/(1-tz)$, где $z\in Д$. Она аналитична всюду вне B, а значит, и внутри некой кривой g_α, заключающей в себе точки 0 и 1, и ограничивающей область G_α, которая при конформном преобразовании

$$t=\varphi(\tau)=-\alpha\ln(1-\beta\tau) \tag{4}$$

переходит во внутренность круга $\tau=\rho e^{i\varphi}$ радиуса $1/\beta>\rho>1$ (рис. 3). Следовательно, и $f(t)$ при этом переходит в функцию $f\varphi(\tau)$, аналитическую внутри этого круга и разлагающуюся там в равномерно сходящийся степенной ряд

$$f\varphi(\tau)=\sum_{q=0}^{\infty}A_q(f)\tau^q.$$

Определив коэффициенты $A_q(f)$ путем преобразования ряда $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(tz)^k$ к новой переменной τ, получим, что

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{q=0}^{\infty}A_q(f)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}z^k. \tag{3'}$$

Исходя из оценки $A_q(f)<M/\rho^q$, где

$$M=\max_{\tau\leqslant\rho}f\varphi(\tau)=\max_{t\in G_\alpha}f(t)=1/\min\|B-g_\alpha\|,$$

получим максимальную (т. е. по равномерной норме) оценку ошибки представления (3′):

$$\varepsilon_n=\left|\frac{1}{1-z}-\sum_{q=0}^{n}A_q(f)\right|\leqslant\sum_{q=n+1}^{\infty}|A_q(f)|\leqslant\frac{M}{(\rho-1)\rho^n}. \tag{5}$$

Таким образом, поставленная задача наилучшего представления (3) сводится к тому, чтобы так подобрать параметры α и $\rho(\alpha)$, чтобы обеспечить $\min\varepsilon_n$ при условии $G_\alpha\not\subset B$. Поскольку $1<\rho<1/\beta\approx1+\gamma$, где

$\gamma=e^{-1/\alpha}$, то можно взять $\rho=1+\gamma^p$, где $p>1$. Подставляя ρ в (5), получим

$$\varepsilon_n < \frac{Me^{p/\alpha}}{(1+e^{-p/\alpha})^n}. \tag{6}$$

Очевидно, что $\min \varepsilon_n$ достигается при $\min(p/\alpha)=\min p/\max \alpha$.

Сначала определим ограничения, накладываемые на $\min p$ и $\max \alpha$ требованием $G \not\subset B$. Определив из (4) уравнение кривой g_α:

$$\operatorname{tg}\frac{v_g}{\alpha}=\frac{\beta\rho\sin\varphi}{1-\beta\rho\cos\varphi}, \quad \text{где } \cos\varphi=\frac{1+\beta^2\rho^2-\gamma^{2u}}{2\beta\rho},$$

можно убедиться в том, что для различных участков g_α (рис. 3,*б*) эти ограничения различны:

$$\begin{aligned}
&a:\ \psi=\varphi=180^\circ \Rightarrow \alpha<1{,}4-1{,}4h,\\
&б:\ v_g=\max \Rightarrow \alpha<1-1{,}1h,\\
&г:\ u=0{,}5+x\,(|x|\ll 0{,}5) \Rightarrow \alpha<0{,}9-0{,}6\,(2h+x),\\
&д:\ u=1-x\,(|x|\ll 1) \Rightarrow \frac{2x}{\alpha(1-\gamma)}+2\gamma^{p-1}\leqslant\left(\frac{v_b}{\alpha}\right)^2,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $x=1-\cos\psi/(1+h)$; $v_b=\sin\psi/(1+h)$. В частности, если ближайшее к точке наблюдения возвышение рельефа, выступающее над сферой радиуса r, находится на угловом расстоянии ψ_1, то соответствующие ему на рис. 2 координаты точки *д* равны

$$v_1=\sin\psi_1=l_1; \quad u=\cos\psi_1\approx 1-l_1^2/2; \quad x\approx l_1^2/2.$$

Для этой точки условие (7) можно свести к условию

$$p\geqslant p_0=1+\alpha\ln[2\alpha^2(1-\gamma)/(l_1^2(1-\gamma-\alpha))]. \tag{8}$$

Поскольку для реальных небесных тел $h\ll 1$, а l_1 может быть как угодно мало, то, очевидно, основные ограничения на α и p накладываются вблизи точки ψ_1. Поэтому найдем сначала оптимальные значения параметров α и p, определяемые расположением ближайшей к точке наблюдения возвышенной точки рельефа, т. е. условием (8). Определяя при условии (8) $\min \varepsilon_n$, получим, что он достигается при следующих значениях параметров:

$$\alpha=0{,}36; \quad p=1+0{,}36\,(s+\ln(0{,}42/l_1^2)), \tag{9}$$

где $0<s\leqslant 1$ ($s=1$ при $n=0$; $s=1-nl_1^2(1+nl_1^2/18)/18$ при $n\ll e^{p/\alpha}$; $s=1/(k+1)$ при $n=ke^{p/\alpha}$) и равен

$$\varepsilon_n\leqslant\frac{22e^s}{sl_1^3\,(1+0{,}15\,l_1^2\,e^{-s})^n} \quad \text{при } n\leqslant n_0=6{,}7/l_1^2,$$

$$\varepsilon_n\leqslant\frac{110}{l_1^3(1+0{,}15\,l_1^2)^n} \quad \text{при } n>n_0. \tag{10}$$

Для оценки оптимальности полученного нами разложения (3) с ошибкой представления (10) сравним его с универсальным разложением Миттаг-Леффлера, представленным в [1, 3]. Для той же самой области

наблюдения, характеризующейся удалением ближайших гор на l_1, найдем из [3]:

$$\varepsilon_n^y \leqslant \frac{80e^{20/l_1^2}}{l_1^2(1+0,5e^{-20/l_1^2})^n}. \tag{11}$$

Сравнивая (10) и (11), видим, что в полученном разложении ошибка представления ниже, чем в универсальном, более чем в e^{20/l_1^2} раз, причем $\varepsilon_n^y/\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Скорость сходимости (3) может быть проиллюстрирована следующим сравнением. Определив ошибку приближения при представлении функции $1/(1-z)$ степенным рядом для $z=1/\rho<1$:

$$\varepsilon_n^* = \left| \frac{1}{1-z} - \sum_{q=0}^{n} z^q \right| \leqslant \sum_{q=n+1}^{\infty} |z|^q = \frac{1}{(\rho-1)\rho^n},$$

получим, что при данном l_1 и для $z>1$ разложение (3) сходится лучше, чем степенной ряд для той же функции, но при $1>z\geqslant 1-l_1^3/110$. Таким образом, перейдя к разложению (1) для потенциала притяжения, можно сказать, что предложенная нами методика приводит к улучшению сходимости ряда Лапласа, ибо даже в случае сходимости ряда Лапласа на физической поверхности, он, естественно, будет сходиться хуже, чем на высоте $l_1^3/110$ над нею. Причем чем ниже расположена точка наблюдения, тем это улучшение значительней.

Предельные значения ψ и θ для различных l_1 и h

l_1	h	ψ, рад	θ
0,0001	0,0001	0,011	13′
	0,001	0,035	34′
	0,01	0,11	2°20′
	0,1	0,35	7°
0,01	0,0001	0,015	1°10′
	0,01	0,11	2°50′
	0,1	0,35	7°35′
0,1	0,0001	0,101	9°45′
	0,01	0,15	10°20′
	0,1	0,36	12°40°

Рассмотрим теперь, какие требования накладывает на рельеф планеты условие оптимальности (9), полученное нами для точки ψ_1. Для дальних зон *а, б, г* (см. рис. 3, *б*) эти требования следующие: $h_a<0,7$, $h_б<0,6$, $h_г<0,4-x/2$, т. е. заведомо выполняются для реальных планет. Для ближней зоны *д*, разрешая неравенство (7) относительно h при условии (9), получим, что если неровности рельефа относительной высоты h находятся на расстоянии

$$\sin\psi \geqslant \sqrt{l_1^2(1+2,6h)e^{-s}+1,2h(1+1,6h)}, \tag{12}$$

то условия оптимальности (9), определенные нами для точки ψ_1, гарантируют выполнение условия $G\not\subset B$ для всех точек планеты. Углы θ наклона местности относительно точки ψ_1 при этом не должны превышать

$$\max\left(1,6\sqrt{\sin^2\psi-l_1^2}\,;\quad 1,7l_1;\quad l_1+0,4\sqrt{\sin^2\psi-l_1^2}\right).$$

Если реальный рельеф при некоторых ψ выступает за пределы, приведенные в таблице, то, очевидно, оптимальные значения a и p нужно брать другими, соответствующими точке ψ с максимальным превышением h и $l=\sin\psi/(1+h)$. Находя теперь $\min\varepsilon_n$ уже при условии

(7), получим следующие условия оптимальности для точек ближней зоны ∂:

$$\alpha=0{,}36-0{,}2h/l^2 \quad \text{при} \quad h<l^2/2; \quad \alpha=0{,}30 \text{ при } h\simeq l^2/2;$$

$$\alpha=2l^2h(1+h)/[l^2(1+h)^2+2h]^2<0{,}25 \text{ при } h\geqslant l^2.$$

Ошибка аппроксимации при этом будет больше, чем (10), примерно в $e^{2(k+1)}l_1{}^2/(7kl^2)$ раз, где $k=h/l^2$.

В заключение отметим, что, зная равномерную ошибку аппроксимации ε_n для оптимального представления функции $1/(1-z)$, следовательно, и для r/Δ, легко определить и равномерную ошибку аппроксимаций для потенциала притяжения V путем интегрирования по массам рельефа M, выступающим вне S:

$$\varepsilon_{V_n}=\left|V(r,\varphi,\lambda)-\frac{f}{r}\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}\int_M P_k(\cos\psi)\left(\frac{r'}{r}\right)^k dm\right|\leqslant\frac{f}{r}\int_M \varepsilon_n dm.$$

Следует сказать, что данная ошибка является сильно завышенной в силу проводимой нами оценки как для ε_n, так и для ε_{V_n} по критерию равномерной (т. е. максимальной) нормы. Поскольку ряд (3′) при $z\neq x$ является знакопеременным, то для нижней границы ε_n получим следующую оценку:

$$\underline{\varepsilon}_n\leqslant|A_n(f)|\leqslant\frac{M}{(1+e^{-p/\alpha})^n}\leqslant\min\left(\frac{1}{l_1(1+0{,}02l_1^2)^n},\ \frac{1}{0{,}06l_1(1+0{,}15l_1^2)^n}\right).$$

Для $\underline{\varepsilon}_{V_n}$ получим $\underline{\varepsilon}_{V_n}\leqslant\frac{f}{r}\int_M(\pm\varepsilon_n)\,dm$. Для более точной оценки $\underline{\varepsilon}_{V_n}$ необходимо знать корреляционную матрицу для $\underline{\varepsilon}_n$, которая зависит, очевидно, как от рельефа, так и от внутреннего строения поверхностных слоев планеты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Чуйкова Н. А.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физ. Астрон. 1985. **26**, № 5. С. 77—81. [2] Чуйкова Н. А.//Там же. 1987. **28**, № 6. С. 56—61. [3] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М., 1968. Т. 2.

Поступила в редакцию
10.06.86