УДК 539.12.01

ПАРАЛЛЕЛИЗУЕМОСТЬ МНОГООБРАЗИЯ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ σ-МОДЕЛИ КАК СЛЕДСТВИЕ СОХРАНЕНИЯ ТОКОВ

В. В. Белокуров, М. З. Иофа

(НИИЯФ)

Показано, что из условий сохранения токов в двумерной суперсимметричной σ-модели с членом Весса—Зумино следует параллелизуемость ее полевого многообразия.

1. В настоящее время теория суперструн рассматривается как наиболее вероятный кандидат на роль непротиворечивой квантовой теории всех фундаментальных взаимодействий (см., напр., [1, 2]).

Как известно, последовательная теория струны может быть сформулирована только в пространстве-времени размерности большей, чем 4. Для установления соответствия с реальным 4-мерным пространством-временем требуется, чтобы происходила компактификация лишних измерений, масштаб которых определяется массой первых возбужденных мод струны (порядка массы Планка), а все поля, описывающие наблюдаемые взаимодействия, содержались бы в спектре ее безмассовых мод.

Таким образом, встает задача построения квантово-полевой теории безмассовых струнных мод, эффективно учитывающей в то же время их взаимодействие со всеми массивными модами [3]. Такой учет приводит к тому, что действие для свободной струны модифицируется и принимает вид действия нелинейной двумерной σ-модели. Так, для бозонной струны

$$S=\frac{1}{2\pi\lambda}\int d^2x\,\{g^{\mu\nu}g_{ab}(\varphi)+b\varepsilon^{\mu\nu}e_{ab}(\varphi)\}\,\partial_\mu\varphi^a\,\partial_\nu\varphi^b \tag{1}$$

$$(\mu,\ \nu=0,\ 1;\ g^{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,\ -1),\ \varepsilon^{\mu\nu}=-\varepsilon^{\nu\mu},\ \varepsilon^{01}=1).$$

Переменные $\varphi^a(x)$ отображают двумерную поверхность в некоторое пространство M с метрикой $g_{ab}(\varphi)$. Второе слагаемое, содержащее антисимметричный тензор $e_{ab}(\varphi)$, имеет структуру члена Весса—Зумино.

Самосогласованность теории струны требует, чтобы соответствующая σ-модель была инвариантна относительно двумерных конформных преобразований. В свою очередь это приводит к требованию равенства нулю всех β-функций нелинейной σ-модели [4].

β-Функции обращаются в нуль во всех порядках теории возмущений при определенном соотношении между слагаемыми действия (1). Прежде чем сформулировать это условие, отметим, что $e_{ab}(\varphi)$ можно рассматривать как потенциал для кручения $T^a{}_{bc}$ многообразия M [5]: $T^a{}_{bc}=g^{ad}T_{dbc}=\pm S^a{}_{bc}$, где

$$S_{abc}\equiv\frac{3}{2}\,b\partial_{[a}e_{bc]}. \tag{2}$$

Если $\Gamma^a{}_{bc}$ есть связность, согласованная с метрикой g_{ab}:

$$\Gamma^a{}_{bc}=\frac{1}{2}\,g^{ad}\,(\partial_b g_{dc}+\partial_c g_{bd}-\partial_d g_{bc}), \tag{3}$$

то обобщенная связность при наличии кручения имеет вид

$$\tilde{\Gamma}^a{}_{bc}=\Gamma^a{}_{bc}-T^a{}_{bc}.$$

Обобщенный тензор кривизны $\tilde{R}_{abcd}$ многообразия M равен

$$\tilde{R}_{abcd}=R_{abcd}+\nabla_c T_{abd}-\nabla_d T_{abc}+T_{ead}T^e{}_{bc}-T_{eac}T^e{}_{bd}, \tag{4}$$

где R_{abcd} — обычный тензор кривизны, построенный по связности $\Gamma^a{}_{bc}$, а ∇_c — ковариантная производная, действующая на ковариантный и контравариантный векторы соответственно следующим образом:

$$\nabla_c V_a=\partial_c V_a-\Gamma^e{}_{ca}V_e, \qquad \nabla_c V^a=\partial_c V^a+\Gamma^a{}_{ce}V^e.$$

Оператор $\tilde{\nabla}_c$ отличается от ∇_c заменой $\Gamma^a{}_{bc}$ на $\tilde{\Gamma}^a{}_{bc}$. Если обобщенный тензор кривизны $\tilde{R}_{abcd}$ многообразия M обращается в нуль (такие многообразия называются параллелизуемыми), то β-функции соответствующей нелинейной σ-модели равны нулю во всех порядках [5—7].

Нелинейная двумерная σ-модель с параллелизуемым полевым многообразием эквивалентна теории свободного фермионного поля [8]. Аналогичный результат имеет место и для суперсимметричной σ-модели [9]. В этом случае в модели существуют сохраняющиеся векторный и аксиальный токи.

Представляется интересным исследовать обратную связь. А именно: определить условия, накладываемые на многообразие σ-модели, к которым приводит требование сохранения токов. В работе [10] показано, что из сохранения векторного и аксиального токов нелинейной бозонной σ-модели следует, что, как минимум, половина ее полевого многообразия параллелизуема.

В настоящей работе мы докажем, что в действительности в этом случае оказывается параллелизуемым все многообразие и тот же самый результат имеет место для суперсимметричной σ-модели.

2. Действие для двумерной суперсимметричной σ-модели с членом Весса—Зумино может быть записано в виде [5]

$$S=\int d^2x\, d^2\theta\, (g_{ab}[\Phi]+b e_{ab}[\Phi])\, \bar{D}\Phi^a(1+\gamma_p)D\Phi^b, \tag{5}$$

$\Phi^a=\varphi^2+\bar{\theta}\Psi^a+\frac{\bar{\theta}\theta}{2}F^a$ — вещественное скалярное суперполе со значениями в произвольном римановом многообразии; θ — двумерный майорановский спинор, компоненты которого антикоммутируют между собой и с компонентами ψ; $D\equiv\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}-i(\gamma_\mu\theta)\partial^\mu$. Удобно выбрать

$$\gamma_0=\sigma_2, \quad \gamma_1=i\sigma_1, \quad \gamma_p\equiv\gamma_0\gamma_1=\sigma_3,$$

тогда $\bar{\psi}_\alpha=-i\varepsilon_{\alpha\beta}$. Заметим также, что

$$\bar{D}\Phi^a D\Phi^b=\bar{D}\Phi^b D\Phi^a, \qquad \bar{D}\Phi^a\gamma_p D\Phi^b=-\bar{D}\Phi^b\gamma_p D\Phi^a.$$

Уравнение движения для суперполя Φ^a получается варьированием S и имеет вид

$$\bar{D}D\Phi^c+\Gamma^c{}_{ab}\bar{D}\Phi^a D\Phi^b-S^c{}_{ab}\bar{D}\Phi^a\gamma_p D\Phi^b=0, \tag{6}$$

где $\Gamma^c{}_{ab}$ и $S^c{}_{ab}$ определены соотношениями (2) и (3), в которых вместо скалярных полей φ^a стоят суперполя Φ^a.

Предположим теперь, что существует набор преобразований суперполей, оставляющих инвариантным действие (5):

$$\delta\Phi^a = A^a{}_{(j)}(\Phi)\,\delta\lambda^j. \tag{7}$$

Более точно, потребуем, чтобы первое слагаемое в лагранжиане не менялось, а второе могло меняться на полную производную. Это требование можно записать как условие для производных Ли:

$$(\mathscr{L}_A g)_{ab} \equiv A^c{}_{(j)} g_{ab,c} + A^c{}_{(j),a} g_{cb} + A^c{}_{(j),b} g_{ac} = 0; \tag{8}$$

$$b\,(\mathscr{L}_A e)_{ab} = \partial_a \chi_{(j)b} - \partial_b \chi_{(j)a}. \tag{9}$$

Уравнение (8) означает, что $A^a{}_{(j)}$ представляют собой векторы Киллинга полевого многообразия. (Определения и свойства используемых геометрических понятий см., напр., в [11].)

Сохраняющиеся токи, соответствующие преобразованиям (7), имеют вид

$$J_{(j)} = A_{(j)a} D\Phi^a + B_{(j)a} \gamma_p D\Phi^a + \gamma_p D N_{(j)}, \tag{10}$$

где $A_{(j)a} = g_{ab} A^b{}_{(j)}$, $B_{(j)a} \equiv b e_{ab} A^b{}_{(j)} - \chi_{(j)a}$ и $N_{(j)}$ — произвольное киральное суперполе. Наличие третьего слагаемого в (10) отражает произвол в определении токов в двумерных теориях. Выражения $\gamma_p J_{(j)}$ являются суперсимметричными аналогами аксиальных токов, соответствующих токам $J_{(j)}$. Сохранение токов $J_{(j)}$ и налагаемое дополнительно условие сохранения аксиальных токов могут быть записаны как

$$\bar{D} J_{(j)} = 0; \qquad \bar{D} \gamma_p J_{(j)} = 0. \tag{11}$$

Пользуясь уравнением движения (6) и выделяя в каждом из уравнений (11) симметричную и антисимметричную части, придем к следующим соотношениям:

$$\nabla_a A_{(j)b} + \nabla_b A_{(j)a} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}\left[\partial_a B_{(j)b} - \partial_b B_{(j)a}\right] + A_{(j)e} S^e{}_{ab} = 0, \tag{13}$$

$$\nabla_a B_{(j)b} + \nabla_b B_{(j)a} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}\left[\partial_a A_{(j)b} - \partial_b A_{(j)a}\right] + B_{(j)e} S^e{}_{ab} = 0. \tag{15}$$

Уравнение (14) означает, что $B_{(j)a}$ также являются векторами Киллинга и поэтому линейно выражаются через $A_{(j)a}$:

$$B_{(j)a} = f_{ji} A_{(i)a}.$$

Так же, как и в бозонном случае [10], можно диагонализовать матрицу f_{ji} и получить $f_{ji} = \pm\delta_{ji}$. (Отметим, что при этом фиксируется значение $b=1$ в (5).)

Замечая, что $\partial_a A_b - \partial_b A_a = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a$, получим

$$\nabla_a A_{(j)b} \pm A_{(j)c} S^c{}_{ab} = 0.$$

Таким образом, векторы Киллинга разбиваются на два класса, в одном из которых

$$\tilde{\nabla}_a A_{(j)b} = 0$$

при выборе тензора кручения $T^c{}_{ab} = +S^c{}_{ab}$, а в другом — при $T^c{}_{ab} =$

$=-S^c{}_{ab}$. Неоднозначность в выборе тензора кручения тесно связана с гомологической структурой полевого многообразия (см., напр., [5]).

Точно так же, как это имело место в бозонной модели [10], векторы Киллинга каждого класса образуют полный набор. Поэтому обращение в нуль $\tilde{\nabla}_a A_{(j)b}$ в одном из классов и, как следствие этого, формула

$$[\tilde{\nabla}_a, \tilde{\nabla}_b] A_{(j)c} = \tilde{R}^d{}_{cba} A_{(j)d} = 0$$

означают, что подмногообразие, связанное с векторами Киллинга данного класса, параллелизуемо.

Покажем, что в действительности в этом случае параллелизуемо все многообразие M. Для этого достаточно убедиться, что в каждом из двух подмногообразий обобщенный тензор кривизны $\tilde{R}_{abcd}$, задаваемый формулой (4), фактически не содержит линейных по T_{abc} членов.

Выберем один из классов векторов $A_{(j)a}$, например тот, для которого $T_{abc} = S_{abc}$. Из условия (9) и определения S_{abc} (2) следует, что

$$(\mathcal{L}_A S)_{abc} \equiv A^d \partial_d S_{abc} + S_{dbc} A^d{}_{,a} + S_{adc} A^d{}_{,b} + S_{abd} A^d{}_{,c} = 0.$$

Подставляя в последнее равенство соотношение $\partial_a A^d = (-\Gamma^d{}_{ac} + S^d{}_{ac}) A^c$ и замечая, что

$$\nabla_e S_{abc} = \partial_e S_{abc} - \Gamma^d{}_{ae} S_{dbc} - \Gamma^d{}_{be} S_{adc} - \Gamma^d{}_{ce} S_{abd},$$

получим

$$A^e{}_{(j)} [\nabla_e T_{abc} + T^d{}_{ac} T_{dbc} + T^d{}_{eb} T_{dac} + T^d{}_{ba} T_{dec}] = 0. \tag{16}$$

В силу того что в каждом из классов векторы Киллинга образуют базис, выражение в скобках равно нулю. Отсюда следует, что тензор $\tilde{R}_{abcd}$ не содержит линейных по кручению членов и из равенства его нулю на одном из двух подмногообразий вытекает равенство его нулю и на другом.

Таким образом, условия сохранения токов (11) приводят к параллелизуемости полевого многообразия нелинейной двумерной σ-модели.

3. Поскольку параллелизуемыми многообразиями, для которых в двумерии можно построить член Весса—Зумино, являются только (полу)простые группы, то это означает, что полевое многообразие суперсимметричной σ-модели, в которой выполняются условия (11), представляет собой групповое многообразие с координатами $\Phi^a(x, \theta)$.

Если $g(\Phi^a)$ — элемент группы G, то можно ввести естественные лево- и правоинвариантные базисы в алгебре Ли группы G:

$$v_a \equiv g^{-1} \frac{\partial}{\partial \Phi^a} g = v_a{}^i T_i; \quad u_a \equiv \frac{\partial}{\partial \Phi^a} g \cdot g^{-1} = u_a{}^i T_i,$$

где T_i — генераторы алгебры Ли.

Метрика на групповом многообразии задается выражением

$$g_{ab} = \mathrm{Tr}\, v_a v_b = \mathrm{Tr}\, u_a u_b.$$

При этом можно показать, что $v^i{}_a$ и $u^i{}_a$ являются векторами Киллинга из определенных выше двух разных классов соответственно.

На групповом многообразии в силу тождеств Якоби для структурных констант комбинация $T^d{}_{ac} T_{dbc} + T^d{}_{eb} T_{dac} + T^d{}_{ba} T_{dec} = 0$, поэтому из (16) следует, что ковариантная производная тензора кручения обращается в нуль: $\nabla_e T_{aba} = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Schwarz J. H.//Phys. Rep. 1982. **89**, N 3. P. 223—322. [2] Green M. B. Aspects to superstring theory. Preprint CALT-68-1257. 1985. [3] Фрадкин Е. С., Цейтлин А. А.//Письма в ЖЭТФ. 1985. 41, N 4. P. 169—171. [4] Callan C. G., Friedan D., Martinec E. J., Perry M. J.//Nucl. Phys. 1985. **B262**, N 4. P. 593—609. [5] Braaten E., Curtright T. L., Zachos C. K.//Nucl. Phys. 1985. **B260**, N 3. P. 630—688. [6] Mukhi S.//Phys. Lett. 1985. **162B**, N 3, 4. P. 345—348. [7] De Alwis S. P.//Phys. Lett. 1985. **164B**, N 1, 2, 3. P. 67—70. [8] Witten E.//Comm. Math. Phys. 1984. **92**. P. 455—472. [9] Di Vecchia P., Knizhnik V. G., Petersen J. L., Rossi P.//Nucl. Phys. 1985. **B253**, N 3. P. 701—726. [10] Burges C. J. C.// //Phys. Lett. 1985. **166**, N 2. P. 165—168. [11] Кобяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

Поступила в редакцию
29.10.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 2

УДК 534.242

РАСПРОСТРАНЕНИЕ БЕГУЩИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

А. С. Михайлов, Г. Расул (Афганистан)

(кафедра физики низких температур)

Рассматривается распространение бегущей волны в неоднородной активной автоколебательной среде. Показано, что на границе раздела двух областей, отличающихся частотами осцилляции, имеет место частичное отражение бегущей волны.

Изучение различных процессов в активных средах, образованных из самовозбуждающихся нелинейных связанных осцилляторов, представляет собой важную задачу современной теории самоорганизации. Как известно, в этих средах образуются волны, распространяющиеся по объему среды [1]. Классическим теперь уже примером такого явления служит распространение волн в реакции Белоусова—Жебатинского [2, 3]. Аналогичные явления встречаются и в некоторых других областях естественных наук.

Предметом настоящей работы является исследование распространения волн в неоднородной осциллирующей среде. Будем предполагать, что движение — одномерное. Цепочку связанных самовозбуждающихся осцилляторов можно описать обобщенным уравнением Гинзбурга—Ландау:

$$\partial_t\eta=(1+i\Omega(x))\eta-(1+ic_1)|\eta|^2\eta+(1+ic_2)\Delta\eta. \quad (1)$$

Функция $\Omega(x)$ характеризует изменение собственной частоты малых колебаний осцилляторов при движении вдоль цепочки. Удобно определить амплитуду и фазу колебаний осцилляторов, положив $\eta=\rho e^{i\Phi}$.

Заметим, что уравнение (1) инвариантно относительно одновременного изменения фаз Φ всех осцилляторов на одинаковую величину. Поэтому характерное время релаксации возмущений фазы будет тем больше, чем более плавным по координате x является это возмущение, Иными словами, для длинноволновых возмущений фазы характерные времена велики.

С другой стороны, амплитуды ρ колебаний всегда затухают до установившегося значения за малое характерное время порядка 1. Таким образом, при рассмотрении плавных длинноволновых процессов в цепочке осцилляторов, даваемой уравнением (1), можно использовать сокращенное описание в терминах фазовой переменной $\Phi(x, t)$,