СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Schwarz J. H.//Phys. Rep. 1982. **89**, N 3. P. 223—322. [2] Green M. B. Aspects to superstring theory. Preprint CALT-68-1257. 1985. [3] Фрадкин Е. С., Цейтлин А. А.//Письма в ЖЭТФ. 1985. **41**, N 4. P. 169—171. [4] Callan C. G., Friedan D., Martinec E. J., Perry M. J.//Nucl. Phys. 1985. **B262**, N 4. P. 593—609. [5] Braaten E., Curtright T. L., Zachos C. K.//Nucl. Phys. 1985. **B260**, N 3. P. 630—688. [6] Mukhi S.//Phys. Lett. 1985. **162B**, N 3, 4. P. 345—348. [7] De Alwis S. P.//Phys. Lett. 1985. **164B**, N 1, 2, 3. P. 67—70. [8] Witten E.//Comm. Math. Phys. 1984. **92**. P. 455—472. [9] Di Vecchia P., Knizhnik V. G., Petersen J. L., Rossi P.//Nucl. Phys. 1985. **B253**, N 3. P. 701—726. [10] Burges C. J. C.//Phys. Lett. 1985. **166**, N 2. P. 165—168. [11] Кобяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

Поступила в редакцию
29.10.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 2

УДК 534.242

РАСПРОСТРАНЕНИЕ БЕГУЩИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

А. С. Михайлов, Г. Расул (Афганистан)

(кафедра физики низких температур)

Рассматривается распространение бегущей волны в неоднородной активной автоколебательной среде. Показано, что на границе раздела двух областей, отличающихся частотами осцилляции, имеет место частичное отражение бегущей волны.

Изучение различных процессов в активных средах, образованных из самовозбуждающихся нелинейных связанных осцилляторов, представляет собой важную задачу современной теории самоорганизации. Как известно, в этих средах образуются волны, распространяющиеся по объему среды [1]. Классическим теперь уже примером такого явления служит распространение волн в реакции Белоусова—Жебатинского [2, 3]. Аналогичные явления встречаются и в некоторых других областях естественных наук.

Предметом настоящей работы является исследование распространения волн в неоднородной осциллирующей среде. Будем предполагать, что движение — одномерное. Цепочку связанных самовозбуждающихся осцилляторов можно описать обобщенным уравнением Гинзбурга—Ландау:

$$\partial_t \eta = (1+i\Omega(x))\eta - (1+ic_1)|\eta|^2\eta + (1+ic_2)\Delta\eta. \qquad (1)$$

Функция $\Omega(x)$ характеризует изменение собственной частоты малых колебаний осцилляторов при движении вдоль цепочки. Удобно определить амплитуду и фазу колебаний осцилляторов, положив $\eta = \rho e^{i\Phi}$.

Заметим, что уравнение (1) инвариантно относительно одновременного изменения фаз Φ всех осцилляторов на одинаковую величину. Поэтому характерное время релаксации возмущений фазы будет тем больше, чем более плавным по координате x является это возмущение, Иными словами, для длинноволновых возмущений фазы характерные времена велики.

С другой стороны, амплитуды ρ колебаний всегда затухают до установившегося значения за малое характерное время порядка 1. Таким образом, при рассмотрении плавных длинноволновых процессов в цепочке осцилляторов, даваемой уравнением (1), можно использовать сокращенное описание в терминах фазовой переменной $\Phi(x, t)$,

считая, что значения амплитуды $\rho(x, t)$ адиабатически подстраиваются к мгновенному значению фазы.

Эффективное уравнение для изменения фазы $\Phi(x, t)$ было получено в работах [4—5]; оно имеет вид

$$\partial\Phi/\partial t=\omega(x)+a\Delta\Phi+b(\nabla\Phi)^2, \tag{2}$$

где коэффициенты a и b даются выражениями $a=1+c_1c_2$, $b=c_2-c_1$. Уравнение (2) было недавно использовано при исследовании некоторых задач образования ведущих центров и распространения автоволн в активных средах [6, 7]. Мы предполагаем, что $a>0$ и $b>0$. В уравнение (2) входит функция $\omega(x)=\Omega(x)-c_1$.

Если проделать нелинейное преобразование

$$\Phi(x, t)=\frac{a}{b}\ln Q(x, t), \tag{3}$$

то из (2) можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=\left[\frac{b}{a}\omega(x)+a\Delta\right]Q, \tag{4}$$

которое эквивалентно уравнению Шрёдингера с мнимым временем.

Зададим для распределения частоты вдоль цепочки $\omega(x)$ следующий вид (рис. 1):

$$\omega(x)=\begin{cases}\omega_1 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\sigma,\\ \omega_0 & \text{при } x\leqslant 0 \text{ и } x\geqslant\sigma,\end{cases}$$

где $\omega_1<\omega_0$. Таким образом, собственные частоты осцилляторов на отрезке $0<x<\sigma$ ниже, чем на других участках цепочки.

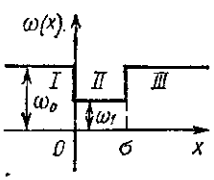

Рис. 1

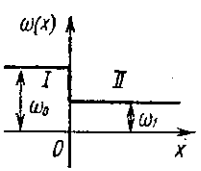

Рис. 2

Делая подстановку

$$Q(x, t)=q(x)\exp\left[\left(\frac{b}{a}\omega_0+a\lambda\right)t\right],$$

где $\lambda>0$, получаем из (4) следующее уравнение:

$$\Delta q(x)+[E-U(x)]\,q(x)=0, \tag{5}$$

где $E=-\lambda$ и $U(x)=-\frac{b}{a^2}[\omega(x)-\omega_0]$.

Решая уравнение (5), после некоторых простых вычислений можно получить выражения для фаз во всех трех областях (см. рис. 1):

$$\Phi_{\mathrm{I}}(x, t)=\omega_0 t+\frac{a}{b}\ln\left(Ae^{a\lambda t+\varkappa_0 x}+Be^{a\lambda t-\varkappa_0 x}\right), \tag{6}$$

$$\Phi_{\mathrm{II}}(x, t)=\omega_0 t+\frac{a}{b}\ln\left(Ce^{a\lambda t+\varkappa_1 x}+De^{a\lambda t-\varkappa_1 x}\right), \tag{7}$$

$$\Phi_{\mathrm{III}}(x, t)=\omega_0 t+\frac{a}{b}(a\lambda t-\varkappa_0 x+F), \tag{8}$$

где $\varkappa_0=\sqrt{|E|}$, $\varkappa_1=\sqrt{|E|+\frac{b}{a^2}(\omega_0-\omega_1)}$. Постоянные A, B, C, D и F легко можно найти из условия непрерывности функции $q(x)$ на общих границах указанных областей.

Заметим, что в $\Phi_{III}(x, t)$ оставлено лишь выражение, которое соответствует распространяющейся в положительную сторону оси x волне. Ясно также, что основной вклад в $\Phi_I(x, t)$ дает выражение, которое описывает бегущую слева направо волну:

$$\Phi_I(x, t) = \omega_0 t + \frac{a}{b}(a\lambda t - \varkappa_0 x + \ln D). \tag{9}$$

Как видно из (6)—(9), при распространении волны все осцилляторы в цепочке совершают колебания с одинаковой частотой $\omega = \omega_0 + (a^2/b)\lambda$, где $\lambda = \varkappa_0^2$, а $\Lambda = b^2\pi/(a\varkappa_0)$ — длина волны на большом удалении от неоднородности.

Рассмотрим поведение фаз у точек скачков частоты. Как видно из (6) и (9), $\Phi_I(x, t)$ лишь на большом расстоянии описывает чистую волну. Подойдя к положению спада частоты, фаза начинает усложняться и происходит как бы частичное отражение волны от границ областей разных частот. Поправка к фазе за счет отраженной волны имеет следующий вид:

$$\delta\Phi_I(x) \approx -\frac{a}{b}\left|\frac{A}{B}\right| e^{-2\varkappa_0|x|}, \tag{10}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{(\varkappa_1^2 - \varkappa_0^2)(1 - e^{2\varkappa_1\sigma})}{(\varkappa_1 + \varkappa_0)^2 e^{2\varkappa_1\sigma} - (\varkappa_1 - \varkappa_0)^2}.$$

Как видно, эта поправка уменьшается по абсолютной величине с удалением от границ областей с разными частотами и отлична от нуля в области порядка $1/(2\varkappa_0)$.

Рассмотрим поведение фазовой скорости волны $v = -(\partial\Phi/\partial t)_x/(\partial\Phi/\partial x)_t$ вблизи точки скачка частоты. Воспользовавшись выражениями (6) и (9), можно получить

$$v_I = v_{I0}\frac{1 - |A/B|\, e^{-2\varkappa_0|x|}}{1 + |A/B|\, e^{-2\varkappa_0|x|}}, \tag{11}$$

где $v_{I0} = [(b/a)\omega_0 + a\lambda]/\varkappa_0$ — фазовая скорость волны вдали от точки скачка частоты. Следовательно, волна как бы «тормозится» при подходе к точке $x=0$, где частота собственных колебаний осцилляторов скачком уменьшается.

Аналогичное поведение имеет место и вблизи точки $x=\sigma$. Здесь поправку за счет отражения можно представить в виде

$$\delta\Phi_{II}(x) \approx \frac{a}{b}\frac{c}{D} e^{2\varkappa_1 x}, \tag{12}$$

где $\frac{c}{D} = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_0}{\varkappa_1 + \varkappa_0} e^{-2\varkappa_1\sigma}$. Эта поправка, как нетрудно видеть, увеличивается с увеличением x и при $x=\sigma$ достигает наибольшего значения.

Можно определить также фазовую скорость волн вблизи точки $x=\sigma$:

$$v_{II} = v_{II0}\frac{1 + (c/D)\, e^{2\varkappa_1 x}}{1 - (c/D)\, e^{2\varkappa_1 x}}, \tag{13}$$

где $v_{II0} = [(b/a)\omega_0 + a\lambda]/\varkappa_1$. Таким образом, с приближением к точке $x=\sigma$, где собственная частота колебаний скачком возрастает, волна ускоряется.

Заметим еще, что прохождение волны через неоднородный участок сопровождается сдвигом фаз, имеющим для рассматриваемого случая такой вид:

$$\Delta\Phi = \frac{a}{b} \ln \frac{(\varkappa_1 + \varkappa_0)^2 e^{2\varkappa_1\sigma} - (\varkappa_1 - \varkappa_0)^2}{4\varkappa_1\varkappa_0 e^{(\varkappa_1+\varkappa_0)\sigma}}. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь некоторые предельные случаи.

1. Предположим, что разность частот в неоднородной области настолько мала, что в первом приближении $\varkappa_1 \approx \varkappa_0 + b\Delta\omega/(2a^2\varkappa_0)$, где $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_1$.

В этом случае

$$\Phi_{\mathrm{I}}(x) \approx -\frac{\Delta\omega}{4a\varkappa_0^2}(1 - e^{-2\varkappa_1\sigma})\, e^{-2\varkappa_0|x|}. \tag{10а}$$

Таким образом, фаза $\Phi_{\mathrm{I}}(x)$ пропорциональна малой величине разности частот в двух областях.

В указанном приближении получаем

$$\Phi_{\mathrm{II}}(x) \approx \frac{\Delta\omega}{4a\varkappa_0^2} e^{2\varkappa_0(x-\sigma)}. \tag{12а}$$

Последняя величина тоже пропорциональна разности частот и при $x = \sigma$ достигает наибольшего значения.

Для сдвига фаз находим

$$\Delta\Phi \approx \frac{\sigma\,\Delta\omega}{2a\varkappa_0}. \tag{14а}$$

что также пропорционально $\Delta\omega$.

2. Положим теперь, что протяженность σ области, в которой собственная частота осцилляторов равна ω_1, мала. Тогда в первом приближении найдем:

$$\Phi_{\mathrm{I}}(x) \approx -\frac{a}{b}\,\frac{(\varkappa_1^2 - \varkappa_0^2)\,\sigma}{2\varkappa_0} e^{-2\varkappa_0|x|}, \tag{10б}$$

$$\Phi_{\mathrm{II}}(x) \approx \frac{a(\varkappa_1 - \varkappa_0)}{b(\varkappa_1 + \varkappa_0)}\,\frac{e^{2\varkappa_1 x}}{1 + 2\varkappa_1\sigma}, \tag{12б}$$

$$\Delta\Phi \approx \frac{a}{b}\,\frac{\varkappa_1^2 - \varkappa_0^2}{2\varkappa_0}\,\sigma. \tag{14б}$$

Таким образом, как величина отражения на границах, так и сдвиг фаз пропорциональны малой величине σ.

3. Рассмотрим теперь неоднородность в виде скачкообразного уменьшения собственной частоты осцилляторов (рис. 2):

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \omega_1 & \text{при } x \geqslant 0, \end{cases}$$

где $\omega_0 > \omega_1$.

С помощью указанной процедуры находим $\Phi_{\mathrm{I}}(x, t)$ и $\Phi_{\mathrm{II}}(x, t)$:

$$\Phi_{\mathrm{I}}(x, t) = \omega_0 t + \frac{a}{b} \ln\left(Ge^{a\lambda t + \varkappa_0 x} + He^{a\lambda t - \varkappa_0 x}\right), \tag{15}$$

$$\Phi_{\mathrm{II}}(x, t) = \omega_0 t + \frac{a}{b}(a\lambda t - \varkappa_1 x + K), \tag{16}$$

где G, H и K — постоянные, определяемые условиями непрерывности соответствующей функции в нуле, а коэффициенты $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ — прежние.

Из (15) получаем $\Phi_I(x)$:

$$\Phi_I(x) \approx -\frac{a}{b}\frac{\varkappa_1-\varkappa_0}{\varkappa_1+\varkappa_0}e^{-2\varkappa_0|x|}. \tag{17}$$

Абсолютная величина $\Phi_I(x)$, как легко видеть, с уменьшением расстояния от скачка уменьшается и в нуле достигает максимального значения. Протяженность области, где $\Phi_I(x)\neq 0$, порядка $1/(2\varkappa_0)$.

Заметим, что (17) можно получить из более общего выражения (10), если устремить величину σ к бесконечности.

При $\Delta\omega\to 0$ получаем

$$\Phi_I(x) \approx -\frac{\Delta\omega}{4a\varkappa_0^2}e^{-2\varkappa_0|x|}. \tag{18}$$

Последнюю формулу легко можно получить и как частный случай выражения (10а) при $\sigma\to\infty$.

Таким образом, мы видим, что поведение автоволны в активной среде, образованной самовозбуждающимися осцилляторами, существенно отличается от свойств обычных (например, звуковых) волн. Хотя на неоднородности и имеет место частичное отражение, отраженная волна очень быстро (на расстоянии порядка пространственного периода волны) затухает. Прохождение автоволны через область неоднородности сказывается (на большом удалении от этой области) лишь в некотором сдвиге начальной фазы колебаний осцилляторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Kuramoto Y., Yamada T.//Progr. Theor. Phys. 1976. **56**. P. 3—21. [2] Полак Л. С., Михайлов А. С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. М., 1983. [3] Кринский В. И., Михайлов А. С. Автоволны. М., 1984. [4] Mikhailov A. S., Engel A.//Phys. Lett. 1986. **117A**. P. 257—260. [5] Kuramoto Y. Chemical oscillation, waves and turbulence. Springer, Heidelberg, 1984. [6] Kuramoto Y., Yamada T.//Progr. Theor. Phys. 1975. **54**. P. 1582—1592. [7] Kuramoto Y., Yamada T.//Ibid. 1976. **55**. P. 643—655.

Поступила в редакцию
18.11.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 2

УДК 537.84

УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО МОМЕНТА МАГНИТНОГО ПОЛЯ В МНОГОМАСШТАБНОМ ТЕЧЕНИИ

Н. Аканбаев

(кафедра теории вероятностей механико-математического факультета)

Получено уравнение второго момента магнитного поля в случайном многомасштабном поле скорости. Проведено асимптотическое исследование полученного уравнения для изотропного отражательно-симметричного многомасштабного течения.

Введение. Одним из центральных вопросов в магнитной гидродинамике является проблема вывода замкнутых уравнений для моментов магнитного поля в заданном турбулизованном потоке проводящей среды. В короткокоррелированном приближении уравнение для среднего магнитного поля впервые было получено Штейнбеком, Краузе и Рэд-