где G, H и K — постоянные, определяемые условиями непрерывности соответствующей функции в нуле, а коэффициенты $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ — прежние.

Из (15) получаем $\Phi_I(x)$:

$$\Phi_I(x) \approx -\frac{a}{b}\frac{\varkappa_1-\varkappa_0}{\varkappa_1+\varkappa_0}e^{-2\varkappa_0|x|}. \tag{17}$$

Абсолютная величина $\Phi_I(x)$, как легко видеть, с уменьшением расстояния от скачка уменьшается и в нуле достигает максимального значения. Протяженность области, где $\Phi_I(x)\neq 0$, порядка $1/(2\varkappa_0)$.

Заметим, что (17) можно получить из более общего выражения (10), если устремить величину σ к бесконечности.

При $\Delta\omega\to 0$ получаем

$$\Phi_I(x) \approx -\frac{\Delta\omega}{4a\varkappa_0^2}e^{-2\varkappa_0|x|}. \tag{18}$$

Последнюю формулу легко можно получить и как частный случай выражения (10а) при $\sigma\to\infty$.

Таким образом, мы видим, что поведение автоволны в активной среде, образованной самовозбуждающимися осцилляторами, существенно отличается от свойств обычных (например, звуковых) волн. Хотя на неоднородности и имеет место частичное отражение, отраженная волна очень быстро (на расстоянии порядка пространственного периода волны) затухает. Прохождение автоволны через область неоднородности сказывается (на большом удалении от этой области) лишь в некотором сдвиге начальной фазы колебаний осцилляторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Kuramoto Y., Yamada T.//Progr. Theor. Phys. 1976. **56**. P. 3—21. [2] Полак Л. С., Михайлов А. С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. М., 1983. [3] Кринский В. И., Михайлов А. С. Автоволны. М., 1984. [4] Mikhailov A. S., Engel A.//Phys. Lett. 1986. **117A**. P. 257—260. [5] Kuramoto Y. Chemical oscillation, waves and turbulence. Springer, Heidelberg, 1984. [6] Kuramoto Y., Yamada T.//Progr. Theor. Phys. 1975. **54**. P. 1582—1592. [7] Kuramoto Y., Yamada T.//Ibid. 1976. **55**. P. 643—655.

Поступила в редакцию
18.11.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 2

УДК 537.84

УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО МОМЕНТА МАГНИТНОГО ПОЛЯ В МНОГОМАСШТАБНОМ ТЕЧЕНИИ

Н. Аканбаев

(кафедра теории вероятностей механико-математического факультета)

Получено уравнение второго момента магнитного поля в случайном многомасштабном поле скорости. Проведено асимптотическое исследование полученного уравнения для изотропного отражательно-симметричного многомасштабного течения.

Введение. Одним из центральных вопросов в магнитной гидродинамике является проблема вывода замкнутых уравнений для моментов магнитного поля в заданном турбулизованном потоке проводящей среды. В короткокоррелированном приближении уравнение для среднего магнитного поля впервые было получено Штейнбеком, Краузе и Рэд-

лером (ШКР) [1], а уравнение для корреляционного тензора (в предположении отражательной симметричности течения) — А. П. Казанцевым [2].

В последнее время Я. Б. Зельдовичем, С. А. Молчановым, А. А. Рузмайкиным и Д. Д. Соколовым (см. [3] и библиографию, приведенную там) был развит строгий в математическом отношении метод исследования системы уравнений магнитной гидродинамики, специфичный для предела больших магнитных чисел Рейнольдса Rm. Он основан на обобщении лагранжева подхода на случай конечной магнитной диффузии вследствие трактовки магнитной диффузии как переноса по случайным винеровским траекториям. В рамках этого подхода были изучены так называемые потоки с обновлением и выяснилось [4], что истинные уравнения для моментов магнитного поля являются интегральными, но если время обновления $\tau \to 0$ (т. е. течение становится δ-коррелированным по времени), то они переходят в дифференциальные уравнения параболического типа. В частности, для первых двух моментов снова получаются уравнения типа ШКР и Казанцева.

Однако модели потоков, о которых упомянуто выше, не вполне реалистичны: основной недостаток гипотез о δ-коррелированности потока или же его обновлении состоит в том, что они неправильно описывают связь между пространственными и временными корреляциями. В то же время известно [5, 6], что реальное турбулентное течение при больших числах Рейнольдса представляет собой совокупность вихрей различного размера и разного времени жизни, т. е. такой поток имеет целую иерархию масштабов. Чтобы отразить это обстоятельство, в теории было введено понятие так называемой многомасштабной модели. При этом, развивая методику [3] применительно к этой модели и предполагая $\tau \ll 1$ (τ — корреляционное время системы), для среднего магнитного поля удается получить уравнение типа ШКР, но с гораздо более сложными выражениями для (обобщенных) коэффициентов турбулентной диффузии и средней спиральности (см. [7]).

Данная работа посвящена изучению второго момента магнитного поля в многомасштабном течении. Основная цель состоит в выводе уравнения для одновременного корреляционного тензора и проведение асимптотического анализа уравнения второго момента в случае изотропного отражательно-симметричного многомасштабного течения.

1. **Вывод уравнения для корреляционного тензора.** Как и в [7], будем исходить из уравнения индукции

$$\partial \mathbf{H}/\partial t = \nu_m \Delta \mathbf{H} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H} + (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v}, \quad \mathbf{H}(0, x) = \mathbf{H}_0(x), \quad (\nabla \mathbf{H}_0 = 0), \quad (1)$$

описывающего эволюцию магнитного поля в заданном турбулизованном потоке $\mathbf{v}(t, x)$ несжимаемой среды с постоянной магнитной диффузией ν_m.

Поле скорости $\mathbf{v}(t, x)$ предполагаем многомасштабным, т. е. считаем, что его можно представить в виде суммы статистически независимых полей скоростей $\mathbf{v}_j(t, x)$, $j=0, 1, \ldots, N$, имеющих различные времена обновления τ_j, корреляционные масштабы $l_j = k_j^{-1}$ и среднеквадратичные скорости $\vartheta_j = \sqrt{\langle \mathbf{v}_j^2 \rangle}$ (здесь и далее угловые скобки означают усреднение по полю скорости), причем $k_0 \ll k_1 \ll \ldots \ll k_N$, $1 \gg \tau_0 \gg \ldots \gg \tau_N$, $\vartheta_0 \gg \vartheta_1 \gg \ldots \gg \vartheta_N$, $\vartheta_j \tau_j k_j \ll 1$.

Поскольку всюду в дальнейшем мы будем иметь дело с парой точек (x, y), то, начиная с этого момента, условимся выписывать только одно из двух аналогично определяемых для x и y выражений.

Для удобства последующих ссылок введем некоторые обозначения. А именно: для $q=0, 1, \ldots, N$ положим

$$\mathbf{U}_{q-1}(t, x, y)=(\mathbf{u}_{q-1}(t, x), \mathbf{u}_{q-1}(t, y)), \quad \mathbf{u}_{q-1}(t, x)=\mathbf{v}_0(t, x)+\ldots$$
$$\ldots+\mathbf{v}_{q-1}(t, x), \quad \mathbf{u}_{-1}=0, \quad (\mathbf{x}_s^{(q)}, \mathbf{y}_s^{(q)})=(\mathbf{x}, \mathbf{y})+\sigma^{(q)}\mathbf{W}_s^*-\mathbf{U}_{q-1}s,$$

где $\mathbf{W}_s$ — стандартный винеровский процесс, * — знак транспонирования, $\sigma^{(q)}$ — некоторая матрица, которая будет определяться потом, и определим функции:

$$b_{lp}^{(q)}(x, y)=\frac{1}{\tau_q}\int\limits_{\mathscr{D}^{(q)}} M\langle v_{ql}(\mathbf{x}_s)\, v_{qp}(\mathbf{y}_u)\rangle\, dsdu, \quad {}^{(q)}a_{ij}^{l}(x, y)=$$
$$=\frac{1}{\tau_q}\int\limits_{\mathscr{D}^{(q)}} M\langle(\nabla_l v_{qi}(\mathbf{x}_s))\, v_{qj}(\mathbf{y}_u)\rangle\, dsdu,$$

$$\bar{a}_m^{(q)}(x, y)=\frac{1}{\tau_q}\int\limits_{\mathscr{D}_1^{(q)}} M\langle(\nabla_l v_{qn}(\mathbf{x}_s))\, v_{qj}(\mathbf{y}_u)\rangle\, dsdu, \quad {}^{(q)}h_{ij}^{lp}(t, x, y)=$$
$$=\delta_{il}\nabla_p u_{q-1,j}(t, y)+\delta_{jp}\nabla_l u_{q-1,i}(t, x)+\frac{1}{\tau_q}\int\limits_{\mathscr{D}_1^{(q)}} M[\delta_{il}(\langle(\nabla_l v_{qj}(\mathbf{y}_s))\nabla_p v_{ql}(\mathbf{y}_u)\rangle-$$
$$-\langle(\nabla_n\nabla_p v_{qj}(\mathbf{y}_s))\, v_{qn}(\mathbf{y}_u)\rangle)+\delta_{jp}(\langle(\nabla_p v_{qj}(\mathbf{x}_s))\nabla_l v_{qp}(\mathbf{x}_u)\rangle-$$
$$-\langle(\nabla_l\nabla_n v_{ql}(\mathbf{x}_s))\, v_{qn}(\mathbf{x}_u)\rangle)]dsdu+\frac{1}{\tau_q}\int\limits_{\mathscr{D}^{(q)}} M\langle(\nabla_l v_{ql}(\mathbf{x}_s))\nabla_p v_{qj}(\mathbf{y}_u)\rangle\, dsdu.$$

В формулах (2_q) $\mathscr{D}^{(q)}=\{(s, u): 0\leqslant s, u\leqslant\tau_q\}$, $\mathscr{D}_1^{(q)}=\{(s, u): 0\leqslant u\leqslant s\leqslant\leqslant\tau_q\}$, $\nabla_j=\partial/\partial x_j$ (или $\partial/\partial y_j$), $(\mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s)=(\mathbf{x}_s^{(q)}, \mathbf{y}_s^{(q)})$, а знак $M=M_{xy}^{(q)}$ означает усреднение по траекториям процесса $\eta_s^{(q)}=(\eta_s^{(q)}(x), \eta_s^{(q)}(y))$, определяемого из стохастического дифференциального уравнения (см. [8])

$$d\eta_s^{(q)}=\sigma^{(q)}d\mathbf{W}_s^*-\mathbf{U}_q(t-s, \eta_s^{(q)})\, ds, \quad \eta_0=(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{3_q}$$

Наконец, определим матрицу $\sigma^{(q)}$ из выражения

$$\sigma^{(q)}(\sigma^{(q)})^*=\beta^{(q)}=\langle\beta^{(q+1)}\rangle_{\nu_q}+B^{(q)}, \quad \beta^{(N+1)}=2\nu_m E, \tag{4_q}$$

где E — единичная матрица,

$$\sigma^{(q)}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}^{(q)} & \sigma_{12}^{(q)}\\ \sigma_{21}^{(q)} & \sigma_{22}^{(q)}\end{pmatrix}, \quad B^{(q)}=\begin{pmatrix}B^{(q)}(x, x) & B^{(q)}(x, y)\\ B^{(q)}(y, x) & B^{(q)}(y, y)\end{pmatrix}, \quad B^{(q)}(x, y)=\|b_{jl}^{(q)}(x, y)\|_{j,l=1}^{3}.$$

Приступим теперь к выводу уравнения для одновременного корреляционного тензора $\mathscr{H}_{ij}(t, x, y)=\langle H_i(t, x)H_j(t, y)\rangle$, причем, следуя идеям [7], усреднение по полю скорости будем проводить последовательно, начиная от самых малых масштабов.

Введем обозначения $\mathscr{H}_{ij}^{(N)}=\langle H_i(t, x)\, H_j(t, y)\rangle_{\nu_N}$, $\mathscr{H}_{ij}^{(q)}=\langle\mathscr{H}_{ij}^{(q+1)}\rangle_{\nu_q}$, так что $\mathscr{H}_{ij}(t, x, y)=\mathscr{H}_{ij}^{(0)}(t, x, y)$, и покажем, что частично усредненный тензор $\mathscr{H}_{ij}^{(q)}$ $(q=0, 1, \ldots, N)$ является решением системы

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{ij}^{(q)}}{\partial t} = L_{x,y}^{(q)} \mathcal{H}_{ij}^{(q)} + (\delta_{il}\delta_{jp}\bar{\alpha}_n^{(q)}(x,x) + \delta_{il}\,{}^{(q)}\alpha_{jn}^{p}(y,x) +$$

$$+ \delta_{jp}\,{}^{(q)}\alpha_{in}^{l}(x,x))\nabla_{x_n}\mathcal{H}_{lp}^{(q)} + (\delta_{il}\delta_{jp}\bar{\alpha}_n^{(q)}(y,y) + \delta_{jp}\,{}^{(q)}\alpha_{in}^{l}(x,y) +$$

$$+ \delta_{il}^{(q)}\alpha_{jn}^{l}(y,y))\nabla_{y_n}\mathcal{H}_{lp}^{(q)} + {}^{(q)}C_{ij}^{lp}\mathcal{H}_{lp}^{(q)}, \qquad (5_q)$$

где оператор

$$L_{x,y}^{(q)} = \frac{1}{2}\beta_{lp}^{(q)}(x,x)\nabla_{x_l}\nabla_{x_p} + b_{lp}^{(q)}(x,y)\nabla_{x_l}\nabla_{y_p} + \frac{1}{2}\beta_{lp}^{(q)}(y,y)\nabla_{y_l}\nabla_{y_p} -$$

$$- u_{q-1,l}(t,x)\nabla_{x_l} - u_{q-1,l}(t,y)\nabla_{y_l},$$

а коэффициенты определены формулами (2_q), (4_q) и следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned}
&{}^{(q)}\alpha_{jl}^{p}(x,y) = \langle {}^{(q+1)}\alpha_{jl}^{p}(x,y)\rangle_{\nu_q} + {}^{(q)}a_{jl}^{p}(x,y), \quad {}^{(N+1)}\alpha_{jl}^{p}(x,y) = 0;\\
&\bar{\alpha}_j^{q}(x,y) = \langle \bar{\alpha}_j^{(q+1)}(x,y)\rangle_{\nu_q} + \bar{a}_j^{(q)}(x,y), \quad \bar{\alpha}_j^{(N+1)} = 0; \qquad (6_q)\\
&{}^{(q)}C_{ij}^{lp} = \langle {}^{(q+1)}C_{ij}^{lp}\rangle_{\nu_q} + {}^{(q)}h_{ij}^{lp}, \ {}^{(N+1)}C_{ij}^{lp} = \delta_{il}c_{pj}^{(x)} + \delta_{jp}c_{il}^{(y)},\\
&c_{pj}^{(x)} = c_{pj}(t,x) = \nabla_j v_p(t,x).
\end{aligned}$$

Шаг 1. Получим уравнение для $\mathcal{H}_{ij}^{(N)}$. Для этого заметим [3], что решение $\mathbf{H}(t,x)$ уравнения (1) можно записать в виде

$$\mathbf{H}(t,x) = M_x^{(N+1)}[G^{(x)}(t,t-s,\eta(x))\mathbf{H}(s,\eta_{t-s}(x))], \qquad (7)$$

где знак усреднения $M_x^{(N+1)}$ относится к процессу $\eta_s(x) = \eta_s^{(N+1)}(x)$ (см. (3_q)), причем матрица $G^{(x)}(t,s,\eta(x))$ является решением системы

$$dG^{(x)} = G^{(x)}C^{(x)}(t-s,\eta_s(x))ds, \quad G^{(x)}(t,0,\eta(x)) = E. \qquad (8)$$

Фиксируем момент времени $(n+1)\tau_N$. Тогда, записав $H_i(t,x)$ и $H_j(t,x)$ с помощью представления (7) и воспользовавшись свойством марковости (см. [9]) процесса η_s, получим

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{ij}^{(N)}((n+1)\tau_N, x, y) =\\
&= \langle M_{x,y}[G_{ij}^{lp}((n+1)\tau_N,\tau_N,\eta)H_{lp}(n\tau_N,\eta_{\tau_N}(x),\eta_{\tau_N}(y))]\rangle_{\nu_N}. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Здесь $G_{ij}^{lp}(t,s,\eta) = G_{il}^{(x)}(t,s,\eta(x))G_{jp}^{(y)}(t,s,\eta(y))$, $H_{lp}(t,\eta_s(x),\eta_s(y)) = H_l(t,\eta_s(x))H_p(t,\eta_s(y))$, причем $G_{ij}^{lp}(t,s,\eta)$ является решением системы

$$\begin{aligned}
&dG_{ij}^{lp}(t,s,\eta) = G_{ij}^{l_1p_1}(t,s,\eta)\,{}^{(N+1)}C_{l_1p_1}^{lp}(t-s,\eta_s(x),\eta_s(y))ds,\\
&G_{ij}^{lp}(t,0,\eta) = \delta_{il}\delta_{jp}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Разложим теперь $H_{lp}(n\tau_N, \eta_{\tau_N}(x), \eta_{\tau_N}(y))$ в ряд Тейлора в окрестности точки (x,y) и с помощью (3_N), (10) вычислим (с точностью до членов порядка τ_N) $\eta_{\tau_N}(x)$, $\eta_{\tau_N}(y)$, $G_{ij}^{lp}((n+1)\tau_N,\tau_N,\eta)$. После подставим найденные выражения в (9) и выполним требуемые усреднения по ν_N и по винеровскому процессу. Тогда из условия $\tau_0 \ll 1$ легко вытекает справедливость уравнения (5_N) для $\mathcal{H}_{ij}^{(N)}$.

Шаг 2. Усредняем $\mathscr{H}_{ij}^{(N)}$ по ν_{N-1}. Для этого заметим, что оператор $L_{x,y}^{(q)}$ является инфинитезимальным оператором (см. [9]) процесса $\eta_s^{(q)}$, определяемого из (3_q). Это обстоятельство вместе с известными свойствами винеровского процесса позволяет написать для $\mathscr{H}_{ij}^{(N)}(t, x, y)$ следующее представление:

$$\mathscr{H}_{ij}^{(N)}(t, x, y) = M_{xy}\left[{}^{(N)}G_{ij}^{lp}(t, t-s, \eta^{(N)})\, \mathscr{H}_{lp}^{(N)}(s, \eta_{t-s}^{(N)})\right], \tag{11}$$

где ${}^{(N)}G_{ij}^{lp}(t, s, \eta^{(N)})$ является решением системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} d\,{}^{(N)}G_{ij}^{lp} = G_{ij}^{l_1p_1}\big[&((\delta_{il_1}\delta_{jp_1}\,{}^{(N)}\bar{a}(\eta_s(x), \eta_s(x)) + \delta_{il_1}\,{}^{(N)}a_{j\cdot}^{p_1}(\eta_s(y), \eta_s(y)) + \\ &+ \delta_{jp_1}\,{}^{(N)}a_{i\cdot}^{l_1}(\eta_s(x), \eta_s(x)))\cdot(\tilde{\sigma}^{(N)}d\mathbf{W}_s^*)_1 + ((\delta_{il_1}\delta_{jp_1}\,{}^{(N)}\bar{a}(\eta_s(y), \eta_s(y)) + \\ &+ \delta_{jp_1}\,{}^{(N)}a_{i\cdot}^{l_1}(\eta_s(x), \eta_s(x)) + \delta_{il_1}\,{}^{(N)}a_{j\cdot}^{p_1}(\eta_s(y), \eta_s(y)))\cdot(\tilde{\sigma}^{(N)}d\mathbf{W}_s^*)_2 + \\ &+ {}^{(N)}h_{ij}^{lp}(t-s, \eta_s)\big] \end{aligned} \tag{10_N}$$

с начальным условием ${}^{(N)}G_{ij}^{lp}(t, 0, \eta) = \delta_{il}\delta_{jp}$. В (10_N)

$$\tilde{\sigma}_{jl}^{(N)} = ((\sigma_{jl}^{(N)})^*)^{-1}, \quad (\tilde{\sigma}^{(N)}d\mathbf{W}_s^*)_1 = \tilde{\sigma}_{11}^{(N)}d\mathbf{W}_s^{(x)*} + \tilde{\sigma}_{12}^{(N)}d\mathbf{W}_s^{(y)*},$$

$$a_{i\cdot}^{l}(\eta_s(x), \eta_s(x))\cdot(\tilde{\sigma}d\mathbf{W}_s^*)_1 = \sum_{q=1}^{3} a_{iq}^{l}(\tilde{\sigma}d\mathbf{W}_s^*)_{1q}, \quad \mathbf{W}_s = (\mathbf{W}_s^{(x)}, \mathbf{W}_s^{(y)}).$$

Итак, для усреднения $\mathscr{H}_{ij}^{(N)}$ по ν_{N-1} можно использовать представление (11). Далее, почти дословно повторив рассуждения предыдущего случая, можно убедиться в том, что $\mathscr{H}_{ij}^{(N-1)}(t, x, y)$ действительно удовлетворяет системе (5_{N-1}).

Из сказанного выше уже ясно, что $\mathscr{H}_{ij}(t, x, y)$ является решением системы (5_0). Очевидно также, что роль магнитодиссипационного масштаба, отмеченная в [7], сохраняется, т. е. существенные вклады в коэффициенты уравнения (5_0) дают только масштабы, большие, чем магнитодиссипационный масштаб l_{m*} (напомним, l_{m*} определен из условий $\nu_m\tau_{m*+1} \gg l_{m*+1}^2$, $\nu_m\tau_{m*} \ll l_{m*}^2$).

2. **Случай изотропного отражательно-симметричного многомасштабного течения.** Если предположить $\mathscr{H}_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathscr{H}_{ij}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, то в рассматриваемом случае уравнение (5_0) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{H}_{ij}}{\partial t} = &(2\nu_m\delta_{lp} + b_{lp}(0) - b_{lp}(\mathbf{r}))\,\nabla_l\nabla_p\mathscr{H}_{ij} + [\delta_{il}a_{jq}^p(\mathbf{r})\,\nabla_q + \delta_{jp}a_{iq}^p(\mathbf{r})\,\nabla_q - \\ &- \nabla_l a_{ij}^p(\mathbf{r})]\,\mathscr{H}_{lp}, \end{aligned} \tag{12}$$

где ∇_j — градиент по r_j,

$$b_{lp}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{N}\int_{R^3} \exp\{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\}\,F_{lp}^{(n)}(\mathbf{k})\,f_n(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}, \quad a_{jq}^p(\mathbf{r}) = \nabla_p b_{jq}(\mathbf{r}),$$

$$f_n(\mathbf{k}) = \frac{1}{\tau_n}\int_{\mathscr{D}^{(n)}} M^{(n)}\langle\exp\{i\mathbf{k}\cdot((\mathbf{x}_s^{(n)} - \mathbf{x}) - (\mathbf{y}_u^{(n)} - \mathbf{y}))\}\rangle_{\nu_0,\ldots,\nu_{n-1}}\,ds\,du,$$

а $F_{lp}^{(n)}(\mathbf{k})$ — спектральная функция поля $\mathbf{v}_n$.

Решение уравнения (12) можно искать в виде (по аналогии с тензором корреляции изотропного течения)

$$\mathscr{H}_{ij}(t, \mathbf{r}) = \Phi(t, r)\,\delta_{ij} + \frac{r}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\left(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}\right)$$

и получить уравнение для продольной корреляции $\Phi(t, r)$. Далее, с помощью замены $\sqrt{2m(r)}\,\psi(t, r) = r^2\Phi(t, r)$ это уравнение сводится к уравнению типа Шрёдингера с переменной массой

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m(r)}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - U(r)\,\psi, \tag{13}$$

где

$$m^{-1}(r) = 2\nu_m + B(0) - B(r),\quad b(r) = b_{ll}(r) = 3B(r) + r\frac{dB}{dr},$$

$$U(r) = \frac{1}{4r}\frac{db}{dr} + \frac{1}{r^3 m(r)} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{m^3(r)}\left(\frac{dm}{dr}\right)^2.$$

Займемся теперь приближенным вычислением функции $b(r)$. Прежде всего заметим, что имеет место представление

$$b(r) = 2\sum_{n=0}^{m^*}\int_{\Delta_n}\frac{\sin kr}{kr}E(k)\,f_n(k)\,dk,$$

где $E(k)$ — спектральная энергетическая функция полного потока, Δ_n — достаточно малая окрестность точки $k_n = l_n^{-1}$ (см. [7]). С другой стороны, поскольку основной вклад в $\mathbf{u}_{n-1}(x)$ и $\mathbf{u}_{n-1}(y)$ вносит $\mathbf{v}_0$, то их можно считать независимыми при $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| > l_0$ и совпадающими при $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leqslant l_0$. Если предположить дополнительно еще и гауссовость полей скоростей $\mathbf{v}_j$, $j=0, \ldots, m^*$, то $f_n(k) \sim 1/(\vartheta_0 k)$ при $k \in \Delta_n$. Учитывая это и заменяя в последней формуле сумму интегралом, получим следующую приближенную формулу:

$$b(r) = \frac{c}{\vartheta_0}\int_{k_0}^{k_{m^*}}\frac{\sin kr}{kr}\frac{E(k)}{k}\,dk \quad (c \sim 1).$$

С другой стороны, хорошо известно [6], что в случае изотропной турбулентности функция

$$E(k) = \bar{c}_1\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}\quad (\alpha_0 \ll k \ll \alpha_1),$$

где (α_0, α_1) — инерционная область, $\bar{\varepsilon}$ — среднее количество энергии, диссипируемой в единицу времени в единице массы жидкости, $c_1 \sim 1$. Кроме того, функция $E(k)$ является быстро убывающей функцией вне (α_0, α_1). Учитывая это, введем вспомогательную функцию

$$\tilde{b}(r, \alpha_0, \alpha_1) = \frac{c}{\vartheta_0}\int_0^\infty\frac{\sin kr}{kr}\cdot c_1\bar{\varepsilon}^{2/3}k^{-8/3}\exp\left\{-\frac{\alpha_0}{k} - \frac{k}{\alpha_1}\right\}dk.$$

Для приближенного вычисления $\tilde{b}(r, \alpha_0, \alpha_1)$ можно использовать формулу (9) из [10, с. 354] и воспользоваться известными свойствами цилиндрической функции мнимого аргумента. Кроме того, $b(r) \approx \tilde{b}(r, k_0, k_{m^*})$, если $\nu_m > \nu$ (ν — гидродинамическая вязкость) и $b(r) \approx$

$\approx \tilde{b}(r, k_0, \alpha_1)$, если $v_m \leqslant v$. Тем самым можно найти разложения $b(r)$, $B(r)$, $m(r)$, $U(r)$. Далее эти разложения можно использовать для проведения спектрального анализа уравнения (13). Здесь отметим только, что условием существования потенциальной ямы является выполнение условия $\mathrm{Rm} > \mathrm{Re}^{5/4}$ (Re — гидродинамическое число Рейнольдса), при этом квазиклассический интеграл растет как $c_2 \ln(\mathrm{Rm}\mathrm{Re}^{-5/4}) + c_3 \ln \mathrm{Re}$, $c_2 \sim 1$, $c_3 \sim 1$.

В заключение автор благодарит С. А. Молчанова, А. А. Рузмайкина и Д. Д. Соколова за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H.//Z. Naturforsch. 1969. **21a**. P. 369—376. [2] Казанцев А. П.//ЖЭТФ. 1967. **53**. С. 1806—1813. [3] Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д.//УФН. 1985. **145**, № 4. С. 593—628. [4] Dittrich P., Molchanov S. A., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.//Astron. Nachr. 1984. **305**, N 3. P. 119—125. [5] Колмогоров А. Н.//ДАН СССР. 1941. **30**, № 4. С. 299—303. [6] Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М., 1967. Ч. 2. [7] Аканбаев Н.//Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения. Алма-Ата, 1986. С. 3—8. [8] Маккин Х. П. Стохастические интегралы. М., 1972. [9] Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., 1965. [10] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.

Поступила в редакцию
09.12.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 2

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 549.121.7

МОМЕНТЫ ПРОДОЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫХ КАСКАДОВ

И. П. Иваненко, В. В. Сизов

(НИИЯФ)

Развивается широко применяемый в каскадной теории метод моментов: последовательно учитываются рассеяние и реалистические сечения других элементарных взаимодействий. На примере каскада, развивающегося в свинце, проводится исследование физической и математической точности метода.

Метод моментов позволяет получить энергетические спектры и продольные распределения каскадных частиц в различных веществах при произвольных значениях переменных и параметров.

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию этого метода: последовательному учету рассеяния и реалистических сечений других элементарных взаимодействий и исследованию физической и математической точности метода [1, 2]. Моменты каскадной кривой с учетом рассеяния получены путем последовательного вычисления смешанных моментов по глубине и углу. При описании упругого рассеяния электронов ливня на атоме учтены конечные размеры ядра и экранирование заряда ядра электронными оболочками. Проводится сравнение с результатами, полученными с использованием приближения Ландау и асимптотических сечений элементарных взаимодействий. Методика и результаты восстановления каскадных кривых по моментам будут обсуждены в следующей статье.