$\approx \bar{b}(r, k_0, \alpha_1)$, если $\nu_m \leqslant \nu$. Тем самым можно найти разложения $b(r)$, $B(r)$, $m(r)$, $U(r)$. Далее эти разложения можно использовать для проведения спектрального анализа уравнения (13). Здесь отметим только, что условием существования потенциальной ямы является выполнение условия $\mathrm{Rm} > \mathrm{Re}^{5/4}$ (Re — гидродинамическое число Рейнольдса), при этом квазиклассический интеграл растет как $c_2 \ln(\mathrm{Rm}\mathrm{Re}^{-5/4}) + c_3 \ln \mathrm{Re}$, $c_2 \sim 1$, $c_3 \sim 1$.

В заключение автор благодарит С. А. Молчанова, А. А. Рузмайкина и Д. Д. Соколова за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H.//Z. Naturforsch. 1969. **21a**. P. 369—376. [2] Казанцев А. П.//ЖЭТФ. 1967. **53**. С. 1806—1813. [3] Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д.//УФН. 1985. **145**, № 4. С. 593—628. [4] Dittrich P., Molchanov S. A., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.//Astron. Nachr. 1984. **305**, N 3. P. 119—125. [5] Колмогоров А. Н.//ДАН СССР. 1941. **30**, № 4. С. 299—303. [6] Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М., 1967. Ч. 2. [7] Аканбаев Н.//Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения. Алма-Ата, 1986. С. 3—8. [8] Маккин Х. П. Стохастические интегралы. М., 1972. [9] Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., 1965. [10] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.

Поступила в редакцию
09.12.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 2

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 549.121.7

МОМЕНТЫ ПРОДОЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫХ КАСКАДОВ

И. П. Иваненко, В. В. Сизов

(НИИЯФ)

Развивается широко применяемый в каскадной теории метод моментов: последовательно учитываются рассеяние и реалистические сечения других элементарных взаимодействий. На примере каскада, развивающегося в свинце, проводится исследование физической и математической точности метода.

Метод моментов позволяет получить энергетические спектры и продольные распределения каскадных частиц в различных веществах при произвольных значениях переменных и параметров.

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию этого метода: последовательному учету рассеяния и реалистических сечений других элементарных взаимодействий и исследованию физической и математической точности метода [1, 2]. Моменты каскадной кривой с учетом рассеяния получены путем последовательного вычисления смешанных моментов по глубине и углу. При описании упругого рассеяния электронов ливня на атоме учтены конечные размеры ядра и экранирование заряда ядра электронными оболочками. Проводится сравнение с результатами, полученными с использованием приближения Ландау и асимптотических сечений элементарных взаимодействий. Методика и результаты восстановления каскадных кривых по моментам будут обсуждены в следующей статье.

Уравнения для моментов с учетом рассеяния. В работах [1, 2] рассматривались одномерные моменты по глубине и углу. Получим уравнения для смешанных моментов по этим переменным.

Уравнения для функций распределения P, $\Gamma(E, t, \cos\theta)$ электронов и фотонов по энергии E, глубине t и углу θ в ливне, вызванном первичной частицей энергии E_0, имеют вид [3]

$$\frac{\partial P}{\partial t}\cos\theta = L_1(P,\Gamma) + \rho\int(P(E,t,\cos\theta) - P(E,t,\cos\theta'))\,\sigma(\chi)\sin\chi d\chi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\cos\theta = L_2(P,\Gamma).$$

Здесь L_1, L_2 — стандартные интегро-дифференциальные операторы каскадной теории, действующие на переменную E [1]; интегральный член в правой части первого уравнения описывает кулоновское рассеяние электронов на ядрах, ρ — плотность рассеивающих центров, $\sigma(\chi)$ — сечение рассеяния. Смысл обозначений углов ясен из рис. 1.

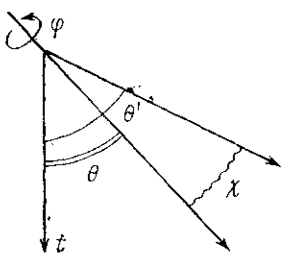

Рис. 1

Разлагая функции в подынтегральном выражении по полиномам Лежандра $\mathscr{P}_l(\cos\theta)$, пользуясь формулой сложения углов для этих полиномов и выполняя интегрирование по φ, приведем уравнения (1) к следующему виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t}\cos\theta = L_1(P,\Gamma) - \sum\limits_l P_l(E,t)\,S_l(E)\,\mathscr{P}_l(\cos\theta)\,\dfrac{2l+1}{2}, \\ \dfrac{\partial\Gamma}{\partial t}\cos\theta = L_2(P,\Gamma). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь

$$P_l(E,t) = \int_0^\pi P(E,t,\cos\theta)\,\mathscr{P}_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \quad (3)$$

$$S_l(E) = 2\pi\rho\int_0^\pi(1 - \mathscr{P}_l(\cos\chi))\,\sigma(\chi)\,\sin\chi\,d\chi. \quad (4)$$

Поведение функции $S_l(E)$ при различном описании кулоновского рассеяния подробно исследовано в [2]. Получим из (2) систему уравнений для смешанных моментов P, $\Gamma_l^{(n)}(E)$:

$$P,\Gamma_l^{(n)}(E) = \iint P,\Gamma(E,t,\cos\theta)\,t^n\,\mathscr{P}_l(\cos\theta)\,dt d\Omega.$$

Рассмотрим нормальное падение первичной частицы на полубесконечную среду. В случае, например, первичного электрона граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{cases} P(E,t=0,\cos\theta) = \dfrac{\delta(\theta)}{\sin(\theta)}\,\delta(E_0 - E), \\ \Gamma(E,t=0,\cos\theta) = 0. \end{cases}$$

Для восстановления каскадной кривой нам необходимы моменты $P,\ \Gamma_0^{(n)}(E)$. Уравнения для них получим, умножив (2) на t^n $(n \geqslant 1)$ и проинтегрировав по $dt d\Omega$:

$$\begin{cases} L_1\left(P_0^{(n)}, \Gamma_0^{(n)}\right) = -nP_1^{(n-1)}, \\ L_2\left(P_0^{(n)}, \Gamma_0^{(n)}\right) = -n\Gamma_1^{(n-1)}. \end{cases} \tag{5}$$

Уравнения для смешанных моментов $P,\ \Gamma_1^{(n-1)}(E)$, входящих в правую часть (5), получим, умножив (2) на $t^n \mathscr{P}_l(\cos\theta)$ $(n \geqslant 1,\ l \geqslant 1)$ и проинтегрировав по $dt d\Omega$:

$$\begin{cases} L_1\left(P_l^{(n)}, \Gamma_l^{(n)}\right) - P_l^{(n)} S_l = -\dfrac{n}{2l+1}\left[(l+1) P_{l+1}^{(n-1)} + lP_{l-1}^{(n-1)}\right], \\ L_2\left(P_l^{(n)}, \Gamma_l^{(n)}\right) = -\dfrac{n}{2l+1}\left[(l+1)\Gamma_{l+1}^{(n-1)} + l\Gamma_{l-1}^{(n-1)}\right]. \end{cases} \tag{6}$$

Наконец, уравнения для функций $P,\ \Gamma_l^{(0)}$, входящих в правую часть (6) при $n=1$, получим из (2) умножением на $\mathscr{P}_l(\cos\theta)$ и интегрированием по $dt d\Omega$ с учетом граничных условий:

$$\begin{cases} L_1\left(P_l^{(0)}, \Gamma_l^{(0)}\right) - P_l^{(0)} S_l = \begin{Bmatrix} -\delta(E_0 - E) \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ L_2\left(P_l^{(0)}, \Gamma_l^{(0)}\right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\delta(E_0 - E) \end{Bmatrix}. \end{cases} \tag{7}$$

Первая строка выражения в фигурных скобках относится к случаю первичного электрона, вторая — к случаю первичного фотона.

Последовательность вычислений моментов $P,\ \Gamma_l^{(n)}(E)$ иллюстрируется табл. 1. Моменты, стоящие в первой строке, получены решением

Таблица 1

n	0	1	2	3	4...
0	$P,\ \Gamma_0^{(0)}$	$P,\ \Gamma_1^{(0)}$	$P,\ \Gamma_2^{(0)}$	$P,\ \Gamma_3^{(0)}$	$P,\ \Gamma_4^{(0)}$
1	$P,\ \Gamma_0^{(1)}$	$P,\ \Gamma_1^{(1)}$	$P,\ \Gamma_2^{(1)}$	$P,\ \Gamma_3^{(1)}$	
2	$P,\ \Gamma_0^{(2)}$	$P,\ \Gamma_1^{(2)}$	$P,\ \Gamma_2^{(2)}$		
3	$P,\ \Gamma_0^{(3)}$	$P,\ \Gamma_1^{(3)}$			
4	$P,\ \Gamma_0^{(4)}$				

системы уравнений (7); первый столбец получен решением уравнений (5); остальные вспомогательные моменты получаются из уравнений (6).

Для оценки влияния рассеяния на вид каскадной кривой и контроля точности вычислений были получены также моменты каскадной кривой без учета рассеяния $P,\ \Gamma^{(n)}(E)$ решением системы уравнений

$$\begin{cases} L_1\left(P^{(n)}, \Gamma^{(n)}\right) = -nP^{(n-1)}, \\ L_2\left(P^{(n)}, \Gamma^{(n)}\right) = -n\Gamma^{(n-1)}, \end{cases}$$

где $P^{(0)}$, $\Gamma^{(0)}$ (равновесные спектры) — решения уравнений (7) для $l=0$.

Численно-аналитический метод решения системы интегро-дифференциальных уравнений вида (5)—(7) описан в [1]. В этой же работе даны явные выражения операторов L_1, L_2 в приближениях А, Б и В каскадной теории и исследованы решения уравнений (7) для $l=0$ (равновесные спектры); решения для $l\neq0$ (угловые моменты) исследовались в [2].

Результаты расчетов. Моменты каскадной кривой были рассчитаны для свинца в стандартных приближениях А и Б каскадной теории и в приближении В, в котором учитывалось отличие сечений радиационного торможения и образование пар от асимптотических значений, а также влияние на энергетический спектр фото- и комптон-эффектов. Расчет проводился с учетом и без учета рассеяния, причем в приближениях А и Б рассеяние описывалось в рамках приближения Ландау, т. е. член $S_l(E)$ в (2) брался в виде [3]

$$S_l(E)=\frac{E_k^2}{4E^2}\,l\,(l+1),\qquad E_k=21{,}2\ \text{МэВ},$$

а в приближении В функция $S_l(E)$ вычислялась по формуле (4), где в сечении $\sigma(\chi)$ учитывались экранирование заряда ядра атомными электронами и конечные размеры ядра. Все результаты, приведенные в данной работе, получены для ливня от первичного электрона энергии 1 ГэВ в свинце.

Для проверки точности работы программы в приближении А без учета рассеяния рассчитали среднюю глубину $\bar t$ и продольный размер ливня $\overline{t^2}-\bar t^2$ для $E_0/E=10^4$. В табл. 2 проводится сравнение результатов расчета для дифференциальных (P, Γ) и интегральной (N_P) каскадных кривых со значением аналитических выражений, полученных в том же приближении в предположении $E_0\to\infty$:

Таблица 2

Средние величины	Первичный электрон			Первичный фотон		
	P	Γ	N_P	P	Γ	N_P
$\bar t_{\text{анал}}$	10,30	10,50	9,332	11,10	11,30	10,10
$\bar t_{\text{расч}}$	10,33	10,49	9,316	11,12	11,30	10,12
$(\overline{t^2}-\bar t^2)_{\text{анал}}$	14,73	15,83	14,13	15,92	16,93	15,33
$(\overline{t^2}-\bar t^2)_{\text{расч}}$	14,79	15,91	14,33	16,21	17,30	15,54

$$\bar t=1{,}01\ln(E_0/E)+h,$$

$$\overline{t^2}-\bar t^2=1{,}61\ln(E_0/E)+k,$$

где h, k — константы, определяемые типом каскадной кривой и первичной частицы [4]. Как видно из табл. 2, точность расчета $\bar t$ составляет $\sim0{,}1\%$, точность $(\overline{t^2}-\bar t^2)$ — примерно 1%. Подробное обсуждение точности высших моментов и примеры конкретных расчетов будут приведены в следующей работе.

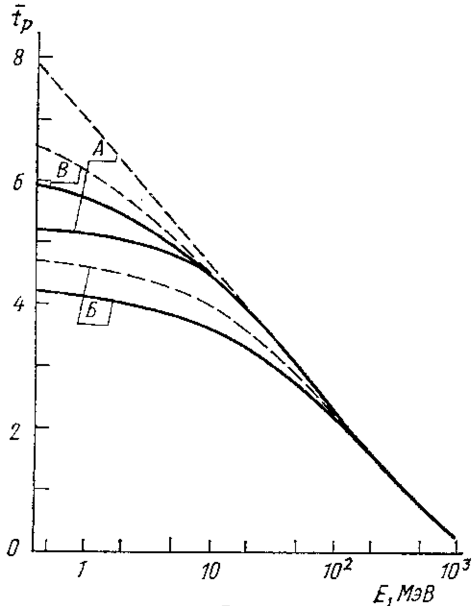

Рис.2

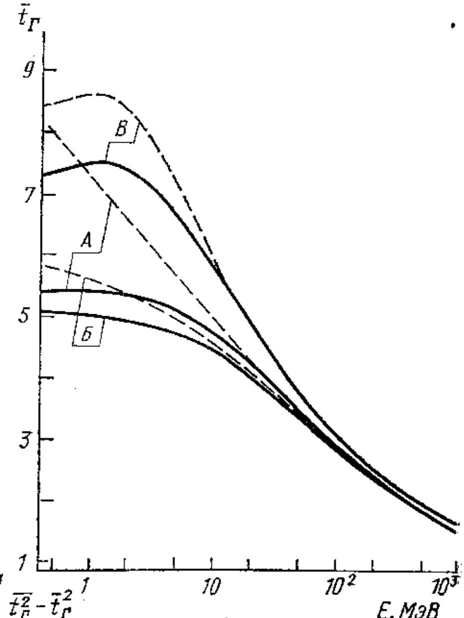

Рис. 3

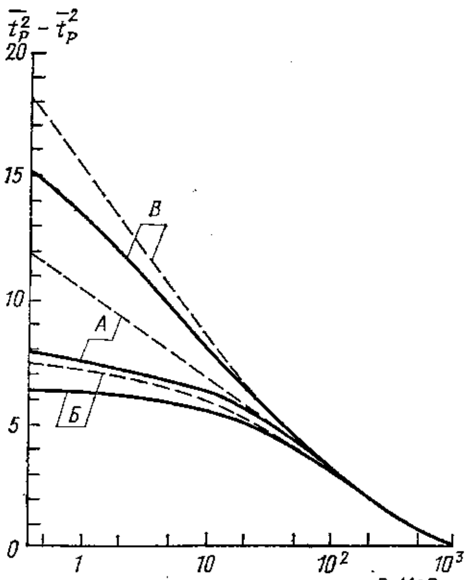

Рис. 4

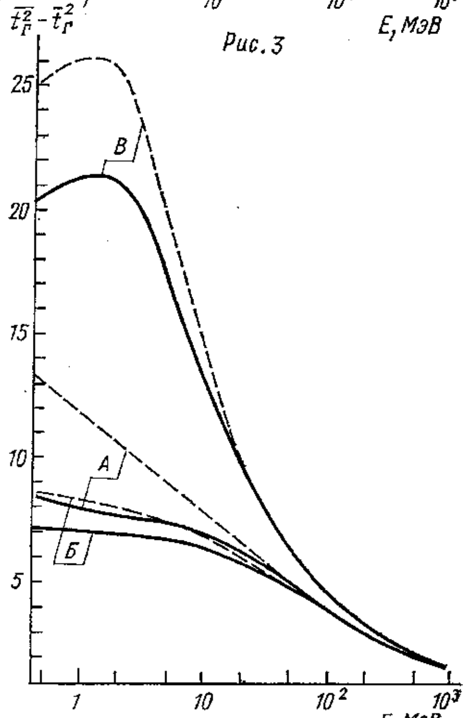

Рис. 5

В качестве примера приводим результаты расчета средней глубины $\bar{t}_{P,\Gamma}$ (рис. 2, 3) и продольного размера $\overline{t^2_{P,\Gamma}}-\bar{t}^2_{P,\Gamma}$ (рис. 4, 5) электронной и фотонной компонент ливня,

$$\overline{t^k_{P,\Gamma}}=N^{(k)}_{P,\Gamma}(E)/N^{(0)}_{P,\Gamma}(E),$$

$$N^{(k)}_{P,\Gamma}=\int\limits_{E}^{E_0} P,\Gamma^{(k)}_0(E)\,dE.$$

Сплошные кривые дают значение этих величин с учетом рассеяния, пунктирные — без учета рассеяния. Буквы у кривых означают приближение каскадной теории.

В приближении *А* без учета рассеяния зависимости $\bar{t}$ и $\overline{t^2}-\bar{t}^2$ от E совпадают с выражениями (8) для $E\ll E_0$. Расчет этих величин в приближениях Б и В дает результаты, существенно отличающиеся от (8) как по абсолютному значению, так и по характеру зависимости от E. Учет ионизационных потерь приводит к подавлению низкоэнергетичной компоненты ливня. На рис. 2–5 это проявляется в уменьшении средней глубины и продольного размера ливня, и в первую очередь его электронной компоненты. Переход к приближению В, напротив, сильнее сказывается на фотонах вследствие сильной зависимости сечения поглощения фотонов σ от энергии. При $E\geqslant 1$ МэВ σ меньше своего асимптотического значения $\sigma_0=0{,}77$, используемого в приближении Б. Уменьшение σ, т. е. увеличение длины свободного пробега фотонов, приводит к тому, что каскадная кривая становится более широкой, а ее максимум смещается в сторону бóльших t. При $E\leqslant 1$ МэВ, наоборот, за счет фото- и комптон-эффекта $\sigma>\sigma_0$ и кривые «В» на рис. 3, 5 выходят на плато и даже несколько понижаются.

Учет рассеяния соответствует увеличению сечения поглощения электронов, поэтому сплошные кривые на рис. 2–5 идут ниже соответствующих пунктирных кривых. В целом можно сказать, что моменты каскадной кривой менее чувствительны к учету рассеяния, нежели к деталям описания сечений других элементарных взаимодействий (переход от приближения Б к В).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Иваненко И. П., Иванова Е. В., Максименко В. М., Сизов В. В. Препринт ФИАН СССР № 257. М., 1984; Иваненко И. П., Сизов В. В.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1985. 26, № 4. С. 28—32. [2] Иваненко И. П., Максименко В. М., Сизов В. В. Препринт ФИАН СССР № 179. М., 1985; Иваненко И. П., Сизов В. В.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1986. 27, № 3. С. 28—33. [3] Беленький С. З. Лавинные процессы в космических лучах. М., 1948. [4] Росси Б., Грейзен К. Взаимодействие космических лучей с веществом. М., 1948.

Поступила в редакцию
26.11.86