ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 537.84

ЭВОЛЮЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОДНОРОДНОМ И ИЗОТРОПНОМ ПОЛЕ СКОРОСТИ

Д. В. Семенов

(кафедра теории вероятностей механико-математического факультета)

Выведена система уравнений, описывающих эволюцию корреляционной матрицы магнитного поля в изотропном, но отражательно несимметричном поле скорости, и вычислены возмущения казанцевских собственных значений. Показано, что спиральность увеличивает казанцевские собственные значения.

1. Рассмотрим уравнение эволюции магнитного поля

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\nu_m\Delta\mathbf{H}+\operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}] \tag{1}$$

в изотропном и однородном по пространству случайном поле скорости $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, δ-коррелированном по времени. Условие δ-коррелированности поля $\mathbf{v}$ формально можно записать в виде

$$\langle v_i(t, \mathbf{x})v_j(t, \mathbf{x}')\rangle=\delta(t-t')V_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'),\ \langle v_i\rangle=0.$$

Более реалистическая модель случайного поля скорости получится, если предполагать, что $\mathbf{v}$ обновляется со временем обновления τ, и устремить τ к нулю. Формально это означает, что

$$v(t, \mathbf{x})=v_0([t/\tau], \mathbf{x})\sqrt{\tau_0/\tau},\quad \langle v_0\rangle=0,$$
$$\tau\langle v_i(t, \mathbf{x})v_j(t, \mathbf{x}')\rangle=V_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t), \tag{2}$$

где τ_0 — временной корреляционный масштаб моделируемого поля $\mathbf{v}$. Будем рассматривать бездивергентные поля скорости $\operatorname{div} v=0$. При сделанных предположениях (2) для моментов магнитного поля получаются замкнутые уравнения.

Эволюция среднего магнитного поля описывается уравнением Штеенбека, Краузе и Рэдлера:

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\left(\nu_m+\frac{\tau_0}{6}\langle\mathbf{v}_0^2\rangle\right)\Delta\mathbf{H}+\operatorname{rot}\alpha\mathbf{H}, \tag{3}$$

где $\alpha=\frac{\tau_0}{6}\langle\mathbf{v}_0\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}_0\rangle$ — спиральность поля $\mathbf{v}$. Эволюция корреляционной матрицы поля

$$K_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')=\langle H_i(t, \mathbf{x})H_j(t, \mathbf{x}')\rangle$$

в этой ситуации описывается системой из девяти уравнений, вывод которой можно найти в [1]:

$$\partial_t K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)=\left(\nu_m+\frac{\tau_0}{6}\langle v_0^2\rangle\right)(\Delta_x+\Delta_{x'})K_{ij}+$$

$$+\alpha\left(\varepsilon_{ikm}\frac{\partial K_{mj}}{\partial x_k}+\varepsilon_{jkm}\frac{\partial K_{im}}{\partial x_k'}\right)+K_{mn}\frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x_n'\partial x_m}+$$

$$+V_{mn}\frac{\partial^2 K_{ij}}{\partial x_n'\partial x_m}-\frac{\partial K_{in}}{\partial x_m}\frac{\partial V_{mj}}{\partial x_n'}-\frac{\partial V_{in}}{\partial x_m}\frac{\partial K_{mj}}{\partial x_n'}, \tag{4}$$

где $\varepsilon_{ikm}=-\varepsilon_{kim}=\varepsilon_{kmi}$, $\varepsilon_{123}=1$.

Уравнение (3) непосредственно решается преобразованием Фурье $\mathbf{H}(\mathbf{x})=\mathbf{e}^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}\ \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{p})$. Пусть $\nu=\nu_m+(\tau_0/6)\langle v_0^2\rangle$, тогда

$$\partial_t\widehat{\mathbf{H}}=-\nu\mathbf{p}^2\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{p})+i\alpha\mathbf{p}\times\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{p}). \tag{5}$$

При фиксированном $\mathbf{p}$ спектр этого уравнения состоит из трех точек: $-\nu\mathbf{p}^2$, $-\nu\mathbf{p}^2\pm|\alpha\mathbf{p}|$, поэтому решения (5) растут не быстрее $\exp\left(\frac{\alpha^2}{4\nu}t\right)$ и спектр (3) есть $\left(-\infty,\ \frac{\alpha^2}{4\nu}\right]$. Это означает, что при $\alpha\neq0$ среднее поле имеет беспороговую по ν генерацию.

Проанализировать спектр уравнения (4) существенно сложнее. При дополнительном предположении отражательной симметричности поля и в отражательно-симметричных и изотропных решениях K_{ij} система (4) была исследована Казанцевым [2] и Новиковым, Рузмайкиным и Соколовым [4]. В этом случае первоначальная система редуцируется к одному уравнению для продольной корреляции поля $\mathbf{H}$, известному как уравнение Казанцева (типа Шрёдингера с переменной массой относительно одной пространственной переменной). Анализ этого уравнения показывает, что при ν достаточно малых второй момент поля $\mathbf{H}$ экспоненциально растет, а при больших ν роста нет [3].

Настоящая статья посвящена выводу системы уравнений, описывающих эволюцию K_{ij} в изотропных полях скорости со спиральностью в классе изотропных решений, и построению теории возмущений спектра этой системы по малой спиральности. Основной результат состоит в том, что спиральность увеличивает положительные казанцевские собственные значения.

2. Матрицу корреляций изотропного и однородного поля $\mathbf{v}$ $\langle v_i(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x}')\rangle=V_{ij}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}=\mathbf{x}-\mathbf{x}'$, можно записать в виде

$$V_{ij}(\mathbf{r})=F(|\mathbf{r}|)\delta_{ij}+B(|\mathbf{r}|)\varepsilon_{ikj}r_k+C(|\mathbf{r}|)(\delta_{ij}-r_ir_j/r^2). \tag{6}$$

Бездивергентность поля v приводит к соотношению

$$C(|\mathbf{r}|)=\frac{|\mathbf{r}|}{2}F'(|\mathbf{r}|).$$

Из определения функций F и B следует:

$$F_0=F(0)=\frac{\tau_0}{3}\langle v_0^2\rangle,\quad B_0=B(0)=\frac{\tau_0}{6}\langle\mathbf{v}_0\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}_0\rangle=\alpha.$$

3. Предположим, что $\langle H_i\rangle=0$, тогда можно искать решения в изотропном виде.

$\mathbf{H}$ бездивергентно, поэтому матрица K_{ij} представима в виде, аналогичном (6):

$$K_{ij}(\mathbf{r})=k(|\mathbf{r}|)\delta_{ij}+h(|\mathbf{r}|)\varepsilon_{ikj}r_k+\frac{|\mathbf{r}|}{2}k'(|\mathbf{r}|)\left(\delta_{ij}-\frac{r_ir_j}{r^2}\right). \tag{7}$$

Функция k называется продольной корреляцией поля **H**. Для k и h получаются замкнутые уравнения, которые можно получить, подставляя (7) в (4):

$$\partial_t k = (2\nu_m + F_0 - F)\, k'' + \left((2\nu_m + F_0 - F)\frac{4}{r} - F'\right) k' -$$

$$- k\left(F'' + \frac{4F'}{r}\right) + 4hr\,(-B'),$$

$$\partial_t hr = (2\nu_m + F_0 - F)\,(hr)'' + \left((2\nu_m + F_0 - F)\,\frac{2}{r} - 2F'\right) h'r -$$

$$-(4F' + F''r)\,h + B_0\,(4k' + k''r) - B\,(rk'' + 4k') - 2k'rB' - k\,(B''r + 4B'). \quad (8)$$

Сделаем замену переменных h и k так, чтобы уравнения (8) не содержали h' и k':

$$k = \psi\sqrt{m}/r^2,\ \ h = \varphi m/r^2,\ \ b = (B - B_0)\sqrt{m},$$

где $m = 1/(2\nu_m + F_0 - F)$. Система (8) имеет вид

$$m\partial_t\psi = \left(\partial_r^2 - \frac{2}{r^2}\right)\psi - \left(\sqrt{m}\,\partial_r^2\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{m}{r}\,\partial_r^2\frac{r}{m}\right)\psi + 4mb\varphi,$$

$$m\partial_t\varphi = \left(\partial_r^2 - \frac{2}{r^2}\right)(\varphi - \psi b). \quad (9)$$

Если $b = 0$, то первое уравнение превращается в уравнение Казанцева, а второе описывает эволюцию магнитной спиральности поля **H**. В этом случае φ, а следовательно, и h стремятся к нулю при $t \to \infty$.

4. Чтобы найти спектр системы (9), будем решать задачу на собственные значения:

$$\partial_t \begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix}.$$

Сделаем еще одну замену, чтобы привести систему к гамильтонову виду: $\chi = \varphi - \psi b$. Получим

$$\partial_r^2 \begin{pmatrix}\psi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\lambda + u - 4b^2 m + \dfrac{2}{r^2} & -4bm \\ m\lambda b & m\lambda + \dfrac{2}{r^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi\\ \chi\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}\psi\\ \chi\end{pmatrix}. \quad (10)$$

Через u обозначена функция $\sqrt{m}\,\partial^2\dfrac{1}{\sqrt{m}} - \dfrac{m}{r}\,\partial^2\dfrac{r}{m}$.

5. Чтобы исследовать спектр системы (10), предположим, что F, F', $F'' \to 0$ при $\mathbf{r} \to \infty$, тогда при $\mathbf{r} \to \infty$ выполнено $u \to 0$, $b \to b_\infty$, $m \to m_\infty$,

$$S \to S_\infty = m_\infty \cdot \begin{pmatrix}\lambda - 4b_\infty^2 & -4b_\infty \\ \lambda b_\infty & \lambda\end{pmatrix}.$$

S_∞ имеет спектр $m_\infty\,(\lambda - 2b_\infty^2 \pm 2b_\infty\sqrt{b_\infty^2 - \lambda})$. Если $\lambda \in \mathbf{R}$ и $\lambda < b^2_\infty$, то $\operatorname{Spectr} S_\infty < 0$, и поэтому ψ и χ остаются ограниченными при $r \to \infty$. Следовательно,

$$k = O\left(\frac{1}{r^2}\right),\ \ h = O\left(\frac{1}{r}\right),\ \ k, h \in \mathscr{L}_2.$$

Поэтому спектр системы включает множество $(-\infty, b_\infty^2]$, $b_\infty^2=\alpha/2\nu$. Равенство $b_\infty^2=2\alpha^2/4\nu$ (ср. п. 1) выражает тот простой факт, что для любой случайной величины ξ

$$M|\xi|^2 \geqslant (M|\xi|)^2.$$

6. Систему (10) при $\sup|b|\to 0$ можно рассматривать как возмущение уравнения Казанцева. Если уравнение Казанцева имеет собственное значение $\lambda_k>0$, которому соответствует собственная функция ψ_k, то система (10) имеет собственное значение λ, которому соответствует функция $\begin{pmatrix}\psi\\ \chi\end{pmatrix}$. Разложим λ и $\begin{pmatrix}\psi\\ \chi\end{pmatrix}$ в ряд по $\sup|b|$:

$$\lambda=\lambda_k+\lambda_1+\lambda_2+\ldots,\quad \begin{pmatrix}\psi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_k\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\psi_1\\ \chi_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\psi_2\\ \chi_2\end{pmatrix}+\ldots.$$

Первый порядок теории возмущений дает

$$\lambda_1=\int dr\begin{pmatrix}\psi_k\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -4bm\\ m\lambda b & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_k\\ 0\end{pmatrix}\|\sqrt{m}\,\psi_k\|^{-2}=0,$$

$$\psi_1=0,$$

$$\partial_r^2\chi_1-\left(m\lambda_k+\frac{2}{r^2}\right)\chi_1=m\lambda_k b\psi_k.$$

Во втором порядке теории возмущений

$$\lambda_2=4\int b^2\psi_k^2 m+bm\chi_1\psi_k dr/\|\psi_k\sqrt{m}\|^2.$$

7. Докажем, что $\lambda_2>0$ при $\sup|b|>0$:

$$\int m\psi_k^2 b^2+bm\chi_1\psi_k dr=\int m(\psi_k b+\chi_1)^2-\int m(\psi_k b+\chi_1)\chi_1.$$

Покажем, что $-\int m(\psi_k b+\chi_1)\chi_1 dr>0$:

$$\partial^2\chi_1-\left(m\lambda_k+\frac{2}{r^2}\right)\chi_1=m\lambda_k b\psi_k\Rightarrow\chi_1\partial^2\chi_1-\frac{2}{r^2}\chi_1^2=m\lambda_k\chi_1(b\psi_k+\chi_1),$$

$$\int\chi_1\partial^2\chi_1-\frac{2}{r^2}\chi_1^2=-\int(\partial\chi_1)^2+\frac{2}{r^2}\chi^2 dr<0.$$

Так как $\lambda_k>0$, то $\int m(\psi_k b+\chi_1)\chi_1>0$. Следовательно, $\lambda_2>0$. В процессе доказательства получена оценка

$$\lambda_2<4\frac{\int_0^\infty m\psi_k^2 b^2 dy}{\int_0^\infty m\psi_k^2 dy}.$$

Таким образом, ненулевая функция b приводит при малом $\sup|b|$ к увеличению казанцевских собственных значений системы. Это возможно и тогда, когда спиральность $\alpha=B_0$ равна нулю. Спектр системы (6) не исследован в пп. 6 и 7 полностью, поскольку при $b\neq 0$ могут появляться неказанцевские собственные значения, например комплексные, так как система (6) несамосопряженная, однако существование таких собственных значений не доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Препринт ИПМ № 44. М., 1983. [2] Казанцев А. П.//ЖЭТФ. 1967. 53. С. 1806. [3] Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D., Kleeorin N. I.//Plasma Astroph. 1986. ESA SP 251. P. 557. [4] Новиков В. Г., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Препринт ИПМ № 138. М., 1982.

Поступила в редакцию
19.12.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 3

УДК 530.145.1

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НУЛЕВЫХ ФЕРМИОННЫХ МОД С ВЕЩЕСТВОМ

К. А. Свешников

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Рассматривается влияние нулевых фермионных мод и связанного с ними явления фракционализации (дробности) фермионного заряда в поле топологического солитона на динамику системы.

Если динамика существенно нелинейной квантовой системы приводит к появлению топологически нетривиального классического поля, то такая составляющая может существенно изменить не только свойства основного состояния, но и всю картину процессов взаимодействий в системе. Реально существующим физическим явлением с подобными свойствами может оказаться появление дробного заряда у системы фермионов в поле топологического солитона [1], что имеет экспериментальное подтверждение в физике конденсированного состояния [2]. Не вдаваясь в конкретные детали, необходимые для анализа экспериментальной ситуации, мы рассмотрим квантово-полевую модель Джекива—Ребби [1], содержащую все характерные черты «фракционализации» и связанных с ней явлений. Конкретно мы рассмотрим, как меняются процессы взаимодействия в системе при наличии таких зарядов и к каким наблюдаемым эффектам это может приводить.

Модель [1] есть двумерная система взаимодействующих по Юкаве нелинейного бозонного и фермионного полей, описываемая лагранжианом

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - U(\varphi) + \bar{\psi}(i\hat{\partial} - g\varphi)\psi, \quad U(\varphi) = V(\lambda\varphi)/\lambda^2, \tag{1}$$

λ — параметр разложения, $g=\lambda G$, $G\sim O(\lambda^0)$, ненулевые перестановочные соотношения — $[\varphi(x, t), \partial_t\varphi(x', t)]_- = i\delta(x-x')$, $[\psi(x, t), \psi^+(x', t)]_+ = \delta(x-x')$, и уравнениями движения

$$\Box\varphi + U'(\varphi) + g\bar{\psi}\psi = 0, \tag{2а}$$

$$(i\hat{\partial} - g\varphi)\psi = 0. \tag{2б}$$

В классическом $O(\lambda^{-1})$ приближении в уравнении (2а) можно пренебречь слагаемым $g\bar{\psi}\psi$ и при соответствующем самодействии $V(\varphi)$ у бозонного поля появляется классическая составляющая в виде топологического кинка или солитона

$$\varphi_{\text{сол}}(x, t) = (1/\lambda)\, u\,((x-vt)/\sqrt{1-v^2}). \tag{3}$$