полных плотностей энергии в случае старта и остановки медленно движущейся среды:

$$W_{\text{ст, ост}} = W_0 \left(1 \pm \frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa}} \beta \cos\theta\right), \tag{12}$$

где W_0 — плотность энергии волны до изменения скорости среды, знак «плюс» соответствует старту среды, знак «минус» — ее остановке. Таким образом в случае старта среды энергия возрастает, если проекция волнового вектора **k** на направление скорости положительна (среда как бы «подталкивает» волну), и убывает, если проекция отрицательна. Обратная ситуация получается в случае остановки среды.

В заключение отметим, что излучение, обусловленное неоднородным и неравномерным медленным движением среды, рассматривалось в [4], а излучение неподвижного заряда при старте и остановке среды (в случае произвольной скорости движения) — в [5].

Обсудим пределы применимости полученных выражений. Изменение скорости среды требует для своего осуществления конечного времени. Однако само по себе это обстоятельство вовсе не означает, что мы не можем рассматривать мгновенное изменение скорости. А именно: если характерное время ускорения среды много меньше периода электромагнитной волны, а характерный размер области, где среда ускоряется, много больше длины волны, то выражения для характеристик трансформированных волн зависят только от начального и конечного значений скорости среды и не зависят от деталей перехода [6]. При выполнении этих условий можно пользоваться приближением мгновенного ускорения, которое применяется в данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Болотовский Б. М., Столяров С. Н.//УФН. 1974. **114**, N 4. С. 569. [2] Morgentaller F. R.//IRE Trans. 1958. **MTT-6**. P. 167. [3] Столяров С. Н.// //Эйнштейновский сборник за 1975—1976 гг. М., 1978. С. 152. [4] Давыдов В. А.// //Изв. вузов. Радиофизика. 1983. **26**, № 9. С. 1134. [5] Давыдов В. А.//Там же. 1984. **27**, № 6. С. 753. [6] Болотовский Б. М., Давыдов В. А., Рок В. Е.// //УФН. 1978. **126**, № 2. С. 311.

Поступила в редакцию
12.01.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 3

УДК 530.12:531.51

СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ТЕОРИИ ЭЙНШТЕЙНА—КАРТАНА

И. С. Нургалиев, О. Б. Пискарева

(кафедра теоретической физики)

Исследуется структурная устойчивость космологических моделей Фридмана в теории Эйнштейна—Картана по отношению к изменениям космологического Λ-члена и пространственной кривизны. Рассматриваются случаи как консервативных систем, так и неконсервативных (при учете вязкости).

Теория Эйнштейна—Картана (ТЭК) позволила решить ряд важных проблем стандартной ОТО и ее космологических приложений, таких как построение несингулярной модели, построение «полного» космологического сценария, доказательство смены сжатия расширением в

последних этапах коллапса островной сферически-симметричной конфигурации, описание генерации первичных возмущений полем кручения [1, 2]. В данной работе обсуждается проблема структурной устойчивости Вселенной в рамках ТЭК.

Рассмотрим случай однородных изотропных космологических моделей Фридмана с метрикой Робертсона—Уокера

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\,[dr^2/(1-kr^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \qquad (1)$$

Источник гравитационного поля выберем в виде идеальной спинирующей жидкости Вейсенхоффа [3]. Тогда учет кручения и уравнений движения спина приводит к следующей системе уравнений ТЭК для метрики (1):

$$\varepsilon - A/R^6 = -\Lambda + 3k/R^2 + 3\dot{R}^2/R^2, \qquad (2)$$

$$p - A/R^6 = \Lambda - 2\ddot{R}/R - \dot{R}/R^2 - k/R^2 + 2\alpha\dot{R}/R, \qquad (3)$$

где R — масштабный фактор, ε — плотность энергии, p — давление, $k=0,\ +1,\ -1$ — соответственно для пространственно плоской, замкнутой и открытой Вселенной, Λ — космологическая константа, α — коэффициент объемной вязкости (сдвиговая вязкость в силу изотропности моделей не учитывается), $A=\varkappa^2 S_0^2 R_0^6/4$, S_0, R_0 — параметры нынешней Вселенной. Будем пользоваться системой единиц: $c=1$, $\varkappa=8\pi G/c^4=1$.

Используя уравнение состояния $p=\gamma\varepsilon$, $0\leqslant\gamma\leqslant 1$, сводим уравнения (2) и (3) к уравнению колебаний

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x} - D^2\Lambda x/3 + D(D-1)\,kx^{1-2/D} - D(3-D)\,Ax^{1-6/D}/3 = 0, \qquad (4)$$

где $x=R^{D(\tau)}$, $D=3(1+\gamma)/2$.

Уравнение (4) в фазовом пространстве $(x,\ \dot{x})$ преобразуется к динамической системе

$$\dot{x}=y,$$

$$\dot{y} = D^2\Lambda x/3 + \alpha y - D(D-1)\,kx^{1-2/D} + D(3-D)\,Ax^{1-6/D}/3. \qquad (5)$$

Для частных случаев излучения ($D=2$) и пыли ($D=3/2$) динамическая система имеет вид соответственно:

$$D=2:\ \dot{x}=y,$$

$$\dot{y} = 4\Lambda x/3 + \alpha y - 2k + 2Ax^{-2}/3; \qquad (6)$$

$$D=3/2:\ \dot{x}=y,$$

$$\dot{y} = 3\Lambda x/4 + \alpha y - 3kx^{-1/3}/4 + 3Ax^{-3}/4. \qquad (7)$$

Исследуем системы (6) и (7) с точки зрения их структурной устойчивости по отношению к изменениям Λ-члена и пространственной кривизны с помощью методов качественного анализа динамических систем [4, 5].

Понятие структурной устойчивости было впервые введено в теории дифференциальных уравнений Андроновым и Понтрягиным в 1937 г. и привело к общему понятию структурно устойчивых динамических систем, для которых допускаются малые возмущения параметров рассматриваемых дифференциальных уравнений и требуется топологическая инвариантность фазовых портретов. Проблема структурной устойчивости изотропных моделей Вселенной в рамках ОТО рассматривалась в [6].

Система (5) с коэффициентом вязкости $\alpha=0$ имеет гамильтониан

$$H(x, y) = -y^2/2 + D^2\Lambda x^2/6 - D^2kx^{2-2/D}/2 - D^2Ax^{2-6/D}/6.$$

Фазовые кривые этого гамильтониана $H(x, y)=\text{const}$ соответствуют первым интегралам системы (5) с $\alpha=0$:

$$y^2/2 + (-D^2\Lambda x^2/6 + D^2kx^{2-2/D}/2 + D^2Ax^{2-6/D}/6) = C.$$

Изобразим на фазовой плоскости решения системы в случае плоской Вселенной ($k=0$) (рис. 1). Для $\Lambda>0$ (см. рис. 1, *а*):

$$\dot{x}=y,$$

$$\dot{y}=D^2\Lambda x/3 + D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$

излучение $(D=2)$: $y^2/2=C+2\Lambda x^2/3-2Ax^{-1}/3$,
пыль $(D=3/2)$: $y^2/2=C+3\Lambda x^2/8-3Ax^{-2}/8$.
Для $\Lambda=0$ (см. рис. 1, *б*):

$$\dot{x}=y,$$

$$\dot{y}=D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$

излучение $(D=2)$: $y^2/2=C-2Ax^{-1}/3$,
пыль $(D=3/2)$: $y^2/2=C-3Ax^{-2}/8$.
Для $\Lambda<0$ (см. рис. 1, *в*):

$$\dot{x}=y,$$

$$\dot{y}=-D^2|\Lambda|x/3 + D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$

излучение $(D=2)$: $y^2/2=C-2|\Lambda|x^2/3-2Ax^{-1}/3$,
пыль $(D=3/2)$: $y^2/2=C-3|\Lambda|x^2/8-3Ax^{-2}/8$.

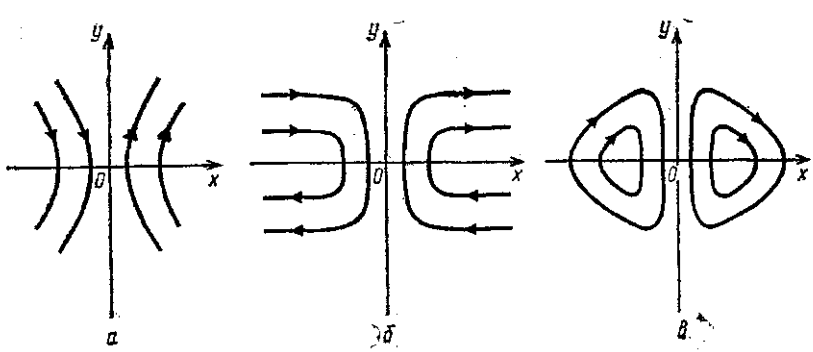

Рис. 1

Из рис. 1 можно видеть, что в случае плоской Вселенной изменение по величине космологической константы Λ вызывает качественные изменения в структуре фазовой плоскости. Таким образом, значение $\Lambda=0$ является бифуркационным значением параметра. Приходим к выводу, что космологические модели обладают структурной неустойчивостью вблизи нулевого значения Λ-члена относительно его малых вариаций.

Рассмотрим эффекты кривизны. Для $\Lambda \neq 0$ фазовые портреты, как легко проверить, не отличаются от плоских моделей. Для закрытой Вселенной ($k=+1$) при $\Lambda=0$ (рис. 2, *а*):

$$\dot{x}=y,$$

$$\dot{y}=-D(D-1)x^{1-2/D}+D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$

излучение ($D=2$): $y^2/2=C-2x-2Ax^{-1}/3$,
пыль ($D=3/2$): $y^2/2=C-9x^{2/3}/8-3Ax^{-2}/8$.

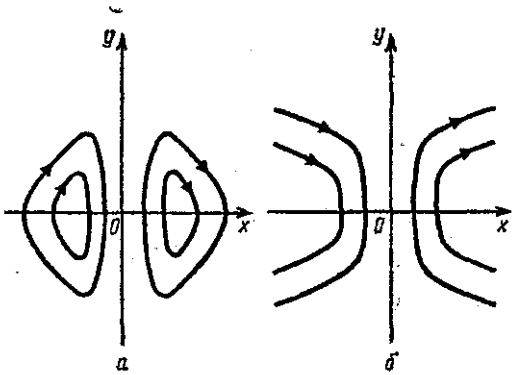

Рис. 2

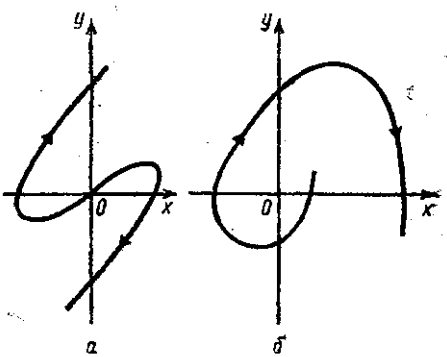

Рис. 3

Для открытой Вселенной ($k=-1$) при $\Lambda=0$ (рис. 2, *б*):

$$\dot{x}=y,$$

$$\dot{y}=D(D-1)x^{1-2/D}+D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$

излучение ($D=2$): $y^2/2=C+2x-2Ax^{-1}/3$,
пыль ($D=3/2$): $y^2/2=C+9x^{2/3}/8-3Ax^{-2}/8$.

Таким образом, эффекты кривизны изменяют структуру фазовой плоскости при $\Lambda=0$. Другими словами, плоские модели являются структурно неустойчивыми относительно изменений пространственной кривизны.

Рассмотрим теперь некоторые детали решений космологических систем с учетом объемной вязкости. Система (5) строго нелинейна со сложно определяемыми особыми точками. Процедуру линеаризации система допускает в случае $\Lambda=0$ для закрытой Вселенной ($k=+1$).

Для излучения ($D=2$):

$$\dot{x}=y,$$

$$\dot{y}=\alpha y-2+2Ax^{-2}/3.$$

Особой точкой в области $x \geqslant 0$, имеющей физический смысл, является

$$x_0=\sqrt{A/3}.$$

Линеаризованное уравнение

$$\ddot{\bar{x}}-\alpha\dot{\bar{x}}+4\bar{x}\sqrt{3/A}/3=0$$

имеет решение

$$x = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t),$$

$$y = C_1 \varkappa_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \varkappa_2 \exp(\lambda_2 t),$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + 4\sqrt{3/A} = 0,$$

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — корни уравнения «коэффициентов распределения»

$$\varkappa^2 - \alpha\varkappa + 4\sqrt{3/A} = 0.$$

Для решений на фазовой плоскости могут представиться следующие случаи корней λ_1 и λ_2.

1. Корни λ_1 и λ_2 действительны и одного знака:

$$\lambda_{1,2} = (\alpha \pm [\alpha^2 - 16\sqrt{3/A}]^{1/2})/2,$$

что выполняется при α таких, что $A > A_\alpha$, $A_\alpha = 768/\alpha^4$. Тогда $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ и существуют новые переменные (ξ, η) такие, что $d\xi/dt = \lambda_1\xi$, $d\eta/dt = \lambda_2\eta$, $\eta = C\xi^a$, $a = \lambda_2/\lambda_1$. Начало координат — особая точка типа неустойчивый узел. Общее решение системы (рис. 3, *а*):

$$x(t) = x_0 + C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t).$$

2. Корни λ_1 и λ_2 комплексно сопряженные. Это выполняется при $0 < A < A_\alpha$, $A_\alpha = 768/\alpha^4$:

$$\lambda_{1,2} = (\alpha \pm i\,[-\alpha^2 + 16\sqrt{3/A}]^{1/2})/2 = a + ib.$$

Особая точка (0, 0) — неустойчивый фокус. Так как при действительных $\bar{x}$, y переменные ξ и η являются комплексно сопряженными, то, вводя промежуточное преобразование $\lambda_1 = a_1 + ib_1$, $\lambda_2 = a_1 - ib_1$, $\xi = u + iv$, $\eta = u - iv$, в полярной системе $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$ получим семейство логарифмических спиралей:

$$dr/d\varphi = a_1 r/b_1, \quad r = C\exp(a_1\varphi/b_1).$$

При переходе к фазовой плоскости $(\bar{x}, y)$ спирали деформируются (рис. 3, *б*). Общее решение:

$$x(t) = x_0 + C\exp(a_1 t)\sin(b_1 t + C_1), \quad a_1 = \operatorname{Re}\lambda, \quad b_1 = \operatorname{Im}\lambda.$$

3. В случае, когда $A = A_\alpha = 768/\alpha^4$, критическая точка является неустойчивым узлом. Общее решение:

$$x(t) = x_0 + \exp(\alpha t/2)\,(C_1 t + C_2).$$

В случае пыли особая точка $x_0 = A^{3/8}$. Линеаризованное уравнение $\ddot{\bar{x}} - \alpha\dot{\bar{x}} + 2\bar{x}\sqrt{1/A} = 0$. Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 - \alpha\lambda + 2\sqrt{1/A} = 0$ являются

$$\lambda_{1,2} = [\alpha \pm (\alpha^2 - 8\sqrt{1/A})^{1/2}]/2.$$

Фазовые портреты аналогичны случаю излучения с $A_\alpha = 64/\alpha^4$.

Рассмотрим асимптотики систем при $t \to \infty$. Как видно из фазовых портретов, системы при $\Lambda < 0$, $\alpha = 0$ (см. рис. 1, *в*) и в случае закрытой

Вселенной (см. рис. 2, *а*) цикличны и не имеют асимптотик. При $t \to \infty$ динамическая система с $\Lambda > 0$, $\alpha = k = 0$ описывается уравнением

$$dx^2/dt^2 - D^2\Lambda x/3 = 0,$$

и асимптотика описывается зависимостью

$$x(t) = C_1 \exp(\sqrt{D^2\Lambda/3}\, t) + C_2 \exp(-\sqrt{D^2\Lambda/3}\, t).$$

Соответственно, при $\Lambda = 0$, $\alpha = k = 0$ система описывается уравнением

$$dx^2/dt^2 = 0$$

и асимптотикой

$$x(t) = C_1 t + C_2,$$

при $\Lambda = \alpha = 0$, $k = -1$ — уравнением

$$dx^2/dt^2 = 2,\ D = 2$$

и асимптотикой $x(t) = (t - t_0)^2$.

Построим фазовую диаграмму (бифуркации) особых точек для постоянной объемной вязкости $\alpha = \text{const}$. Любая точка полуплоскости (A, α) соответствует космологической модели, где $A = 768(D-1)^3/[(3-D)\alpha^4]$. Область $\alpha > 0$ соответствует неустойчивым узлам (выше кривой *1*) и фокусам (между кривой *1* и осью OA), область $\alpha < 0$ — устойчивым узлам (ниже кривой *2*) и фокусам (между кривой *2* и осью OA). Тип особых точек определяется собственными значениями матрицы линеаризации системы (рис. 4). Если коэффициент объемной вязкости является функцией какого-либо параметра δ (например, параметра γ из уравнения состояния), то изменение параметра δ вызывает изменение детерминанта матрицы линеаризации. Из рис. 4 видно, что при некоторых значениях параметра δ (величина бифуркации) соответствующая кривая переходит из области особых точек одного типа в область другого типа. Из диаграммы можно видеть, что требование структурной устойчивости приводит к необходимости учета ненулевой вязкости. Таким образом, вязкость в этом классе решений является стабилизирующим фактором.

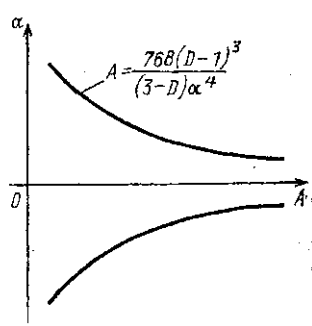

Рис. 4

Фазовые портреты (см. рис. 3) при учете кручения и $\Lambda = 0$ совпадают с фазовыми портретами для космологических моделей Фридмана без учета кручения, но с $\Lambda \neq 0$ в работах Жидловского [6], из чего следует, что учет спина и кручения пространства-времени оказывает на материю действие, подобное космологическому Λ-члену и играет роль эффективного Λ-члена, что упоминалось в работе [7].

В результате проделанной работы сделаны следующие выводы.

1. Рассматриваемые модели являются структурно неустойчивыми относительно изменений Λ-члена при $\Lambda = 0$, $\alpha = 0$.

2. Модели с $k = \Lambda = 0$ являются структурно неустойчивыми по отношению к изменениям пространственной кривизны k для $\alpha = 0$.

3. Для класса решений моделей с $\alpha \neq 0$ учет кручения играет роль эффективного Λ-члена.

4. Космологическая константа Λ является бифуркационным параметром для ряда космологических моделей с бифуркационным значением $\Lambda=0$. Это говорит о важной роли даже малого значения космологического Λ-члена для сопоставления теоретических моделей с реальной Вселенной. Таким образом, при рассмотрении реальной Вселенной необходим учет отличного от нуля космологического Λ-члена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Нургалиев И. С. Астрофизические следствия теории Эйнштейна—Картана: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1985. [2] Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Обухов Ю. Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. М., 1985. [3] Короткий В. А., Обухов Ю. Н.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1987. 28, № 4. С. 6. [4] Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М., 1980. [5] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., 1980. [6] Szydlowski M., Heller M., Golda Z.//Gen. Relat. and Grav. 1984. 16, N 9. P. 877. [7] Иваненко Д. Д., Сарданашвили Г. А. Новые аспекты теории компенсации//Актуальные проблемы теоретической физики. М., 1976. С. 97.

Поступила в редакцию
20.01.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 3

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 549.121.7

РАСЧЕТ ПРОДОЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫХ КАСКАДОВ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

И. П. Иваненко, В. В. Сизов

(НИИЯФ)

Получены каскадные кривые путем восстановления по степенным моментам. Исследована чувствительность результатов к числу используемых моментов, а также к их физической и математической точности. Приведены результаты расчетов для ливней, развивающихся в свинце, в приближениях Б и В каскадной теории с учетом рассеяния.

Традиционный аналитический подход — метод интегральных преобразований — дает возможность количественно изучить продольное развитие электронно-фотонных ливней в легких веществах ($Z\leqslant 30$) и становится непригодным для тяжелых веществ в области энергий вторичных частиц, меньших или порядка десятков МэВ, где сечения элементарных взаимодействий отличаются от асимптотических и существенны рассеяние частиц, комптон- и фотоэффект. Метод Монте-Карло в этом случае требует большого времени и больших ресурсов ЭВМ.

Метод моментов позволяет получить энергетические спектры и продольные распределения каскадных частиц в различных веществах при произвольных значениях переменных и параметров. В данной работе каскадные кривые восстановлены по степенным моментам, полученным в [1].