

4. Космологическая константа  $\Lambda$  является бифуркационным параметром для ряда космологических моделей с бифуркационным значением  $\Lambda=0$ . Это говорит о важной роли даже малого значения космологического  $\Lambda$ -члена для сопоставления теоретических моделей с реальной Вселенной. Таким образом, при рассмотрении реальной Вселенной необходим учет отличного от нуля космологического  $\Lambda$ -члена.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Нурғалиев И. С. *Астрофизические следствия теории Эйнштейна—Картана*: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1985. [2] Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Обухов Ю. Н. *Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий*. М., 1985. [3] Короткий В. А., Обухов Ю. Н. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 1987. 28, № 4. С. 6. [4] Богоявленский О. И. *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике*. М., 1980. [5] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. *Теория колебаний*. М., 1980. [6] Szydlowski M., Heller M., Golda Z. // *Gen. Relat. and Grav.* 1984. 16, N 9. P. 877. [7] Иваненко Д. Д., Сарданашвили Г. А. *Новые аспекты теории компенсации* // *Актуальные проблемы теоретической физики*. М., 1976. С. 97.

Поступила в редакцию  
20.01.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА, АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 3

#### АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 549.121.7

#### РАСЧЕТ ПРОДОЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫХ КАСКАДОВ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

И. П. Иваненко, В. В. Сизов

(НИИЯФ)

Получены каскадные кривые путем восстановления по степенным моментам. Исследована чувствительность результатов к числу используемых моментов, а также к их физической и математической точности. Приведены результаты расчетов для ливней, развивающихся в свинце, в приближениях Б и В каскадной теории с учетом рассеяния.

Традиционный аналитический подход — метод интегральных преобразований — дает возможность количественно изучить продольное развитие электронно-фотонных ливней в легких веществах ( $Z \leq 30$ ) и становится непригодным для тяжелых веществ в области энергий вторичных частиц, меньших или порядка десятков МэВ, где сечения элементарных взаимодействий отличаются от асимптотических и существенны рассеяние частиц, комптон- и фотоэффект. Метод Монте-Карло в этом случае требует большого времени и больших ресурсов ЭВМ.

Метод моментов позволяет получить энергетические спектры и продольные распределения каскадных частиц в различных веществах при произвольных значениях переменных и параметров. В данной работе каскадные кривые восстановлены по степенным моментам, полученным в [1].

**Восстановление каскадных кривых по моментам.** Используем так называемый регулярный метод восстановления каскадных кривых по их моментам [2]. Искомая функция представляется в виде

$$f(t) = W(t) \sum_{k=0}^n C_k S_k(t), \quad (1)$$

где  $S_k(t)$ ,  $k=0, 1, \dots, n$  — система многочленов, ортонормированных с весом  $W(t)$  на промежутке  $[0, \infty]$ :

$$\int_0^{\infty} S_m(t) S_n(t) W(t) dt = \delta_{mn}. \quad (2)$$

Коэффициенты  $C_k$  определяются соотношением

$$C_k = \int_0^{\infty} S_k(t) f(t) dt$$

и выражаются через линейную комбинацию первых  $k$  степенных моментов искомой функции. Весовую функцию  $W(t)$  выбираем в виде

$$W(t) = \frac{\sigma^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} e^{-\sigma t}. \quad (3)$$

Параметры  $\sigma$  и  $\alpha$  вычисляем по трем последовательным моментам искомой функции  $\bar{t}^k, \bar{t}^{k+1}, \bar{t}^{k+2}, \bar{t}^k = \int_0^{\infty} f(t) t^k dt$ :

$$\sigma = (\bar{t}^{k+2} / \bar{t}^{k+1} - \bar{t}^{k+1} / \bar{t}^k)^{-1},$$

$$\alpha = \sigma \bar{t}^{k+1} / \bar{t}^k - k - 1.$$

Если число используемых моментов превышает 3, проводится усреднение  $\sigma$  и  $\alpha$ , полученных для различных значений  $k$ . Многочлены  $S_n(t)$ , удовлетворяющие условию (2) с весовой функцией (3), имеют вид

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \Gamma(\alpha+n+1) \cdot n!}{\sigma^{n-k} \Gamma(\alpha+k+1) k! (n-k)!} t^k.$$

Функция (1) имеет нулевое значение при  $t=0$ . Если по смыслу задачи требуется восстановить такую функцию, что  $f(t=0) = a \neq 0$ , то описанную процедуру применяем для восстановления функции  $\bar{f}(t) = f(t) - a \exp(-t)$  по моментам  $\bar{t}^k = \bar{t}^k - a \cdot n!$ .

**Результаты расчета.** Рассмотрим результат восстановления кривой по моментам. Для оценки точности этой процедуры исследуем чувствительность каскадной кривой к числу моментов  $n$ , используемых при восстановлении. Зафиксируем значения параметров  $\sigma$  и  $\alpha$ , определяющих функцию  $W(t)$  в выражении (1), и будем менять степень полинома

$$\sum_{k=0}^n C_k S_k(t).$$

На рис. 1 приведены интегральные электронные

каскадные кривые  $N_{расч}(E, t)$ , рассчитанные по 3÷7 моментам (в число моментов включается момент нулевой степени) в приближении А для  $E_0/E = 10^4$ , деленные на функцию  $N_{анал}(E, t)$ , полученную аналитически

в том же приближении с учетом второго члена разложения ( $\sim 1/t$ ) при вычислении интеграла обратного преобразования Лапласа методом перевала, что обеспечивает точность вычисления интеграла порядка 1% [3]. Значение  $n$  указано цифрами у кривых.

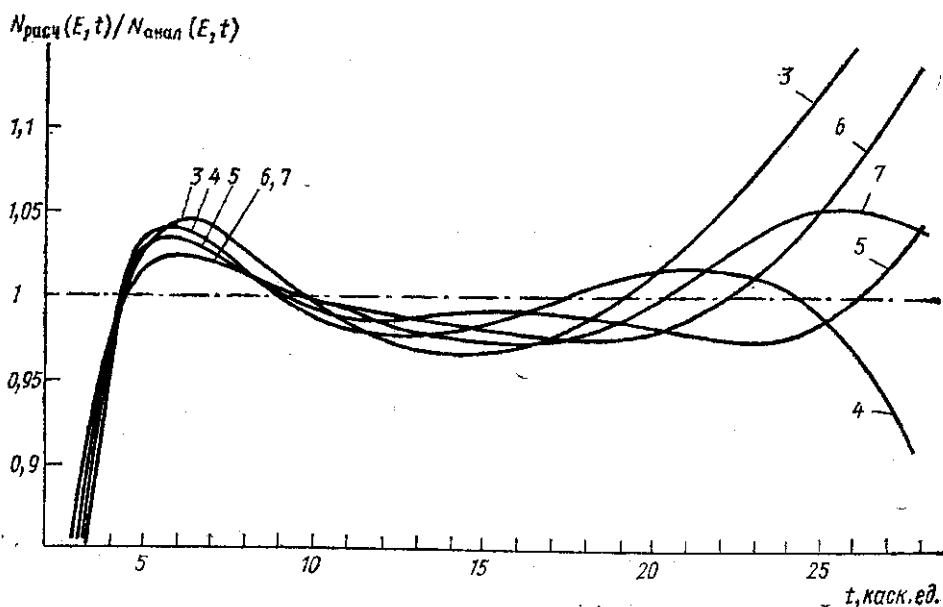


Рис. 1.

Наилучшее согласие результатов расчета и аналитических выражений достигается в области максимума,  $t_{\max} - 5 \leq t \leq t_{\max} + 5$ ,  $t_{\max} \approx 9$ . Ширина области пропорциональна  $\ln(E_0/E)$  и в данном случае составляет около 10 каскадных единиц. Здесь наблюдается равномерная сходимость кривых к единице; при увеличении степени полинома от 3 до 7 максимальное отклонение кривых от единицы уменьшается от  $\sim 5\%$  до  $\sim 2\%$ . При малых  $t$  кривые остаются близки друг к другу, но резко отклоняются от единицы, что связано с неточностью аналитического выражения в этой области. При больших  $t$  кривые, соответствующие различному числу моментов, значительно отличаются от единицы и друг от друга, поскольку каскадная кривая в этой области падает по сравнению с максимальным значением на несколько порядков и не дает вклада в моменты невысоких степеней.

Вместе с тем кривая, полученная по 7 моментам, близка к единице вплоть до  $t \approx 40$ , т. е. использование моментов высоких степеней позволяет продвинуться в область больших  $t$ . Отметим, что подобная ситуация имеет место в том случае, когда все используемые моменты известны с высокой точностью.

В приближении Б в области максимума также наблюдается равномерная сходимость каскадных кривых при увеличении числа используемых моментов. В приближении В, при определении оптимального числа моментов для получения каскадной кривой с заданной точностью необходимо учитывать ограниченную физическую точность моментов. Эта точность определяется тем, насколько хорошо известны сечения элементарных взаимодействий.

В приближении В сечения задаются в виде таблицы, точность интерполяции по которым не может быть выше нескольких процентов. При последовательном вычислении моментов погрешность накапливается, и моменты высоких степеней известны с ошибкой не менее 10%. Использование таких данных приводит не только к ошибочным значениям каскадной кривой в области больших  $t$ , но и «портит» ее в области максимума, что естественно для задач такого типа. В качестве примера в табл. 1 приведены значения каскадной кривой  $N_{\Gamma}(E, t)$ , расчи-

Таблица 1

n	t					
	1	5	10	16	22	28
3	$1,5 \cdot 10^1$	$6,34 \cdot 10^1$	$4,12 \cdot 10^1$	$1,32 \cdot 10^1$	3,22	$6,82 \cdot 10^{-1}$
4	$1,47 \cdot 10^1$	$6,36 \cdot 10^1$	$4,14 \cdot 10^1$	$1,30 \cdot 10^1$	3,15	$6,88 \cdot 10^{-1}$
5	$1,44 \cdot 10^1$	$6,39 \cdot 10^1$	$4,14 \cdot 10^1$	$1,29 \cdot 10^1$	3,17	$7,15 \cdot 10^{-1}$
6	$1,39 \cdot 10^1$	$6,46 \cdot 10^1$	$4,11 \cdot 10^1$	$1,29 \cdot 10^1$	3,28	$7,24 \cdot 10^{-1}$
7	$1,28 \cdot 10^1$	$6,59 \cdot 10^1$	$4,01 \cdot 10^1$	$1,32 \cdot 10^1$	3,40	$6,30 \cdot 10^{-1}$

танной в приближении В по  $3 \div 7$  моментам для  $E_0/E = 10^4$ . Значения параметров  $\sigma$  и  $\alpha$  фиксированы. Из табл. 1 видно, что максимальный разброс значений  $N_{\Gamma}$ , полученных по  $3 \div 7$  моментам, достигает 20%, а по  $4 \div 6$  моментам не превышает 5%. Кривая, рассчитанная по 7 моментам, дает значительную погрешность как при больших  $t$ , так и вблизи максимума. Подчеркнем, что наблюдаемый разброс значений  $N_{\Gamma}$  не есть недостаток метода моментов или следствие неточности численного расчета, а связан с неполным знанием сечений элементарных взаимодействий (табличное представление). Каскадные кривые чувствительны к деталям описания сечений, особенно в области больших  $t$ , и для более точного расчета необходимо знание не только самих сечений, но и их производных, что по таблицам получить невозможно. Вследствие этого каскадную кривую с заданной точностью можно в принципе получить лишь в ограниченном интервале  $t$ , для чего достаточно знать небольшое число моментов. Так, из табл. 1 видно, что при  $t \leq 20$  кривую можно получить с точностью  $\sim 1\%$  всего по 4 моментам.

Точность метода моментов и область его применимости оказываются, таким образом, не хуже соответствующих характеристик других применяемых в каскадной теории численных методов, в частности многогруппового [4]. В то же время в отличие от последнего метод моментов не требует предварительного знания приближенного решения многомерного интегро-дифференциального уравнения.

Достоверность каскадной кривой, восстановленной по  $n$  моментам, можно оценить, сравнивая ее  $(n+1)$ -й,  $(n+2)$ -й, ... моменты с соответствующими «исходными» моментами, не использованными при восстановлении. В табл. 2 приведены значения «исходных» моментов каскадной кривой  $N_{\Gamma}(E, t)$ , полученных в результате решения уравнений (5)–(7) работы [1], и «конечных» моментов, полученных в результате интегрирования каскадной кривой, восстановленной по 4 «исходным» моментам (они отделены в табл. 2 вертикальной двойной чертой). Заметим, что в описанном выше регулярном методе восстановления кривой «конечные» моменты могут отличаться от соответствующих использованных «исходных» моментов, если их число больше 3. Конечный момент нулевой степени (нормировка) всегда совпадает с «исходным».

$E_0/E$	$f^n$	$n$						
		0	1	2	3	4	5	6
<b>Приближение В</b>								
10	$\overline{f}_{НСХ}^n$	5,570	1,689·10 <sup>1</sup>	7,711·10 <sup>1</sup>	4,730·10 <sup>2</sup>	3,656·10 <sup>3</sup>	3,415·10 <sup>4</sup>	3,739·10 <sup>5</sup>
	$\overline{f}_{КОН}^n$	5,570	1,687·10 <sup>1</sup>	7,726·10 <sup>1</sup>	4,739·10 <sup>2</sup>	3,652·10 <sup>3</sup>	3,398·10 <sup>4</sup>	3,718·10 <sup>5</sup>
10 <sup>2</sup>	$\overline{f}_{НСХ}^n$	7,693·10 <sup>1</sup>	4,464·10 <sup>2</sup>	3,606·10 <sup>3</sup>	3,737·10 <sup>4</sup>	4,779·10 <sup>5</sup>	7,326·10 <sup>6</sup>	1,315·10 <sup>8</sup>
	$\overline{f}_{КОН}^n$	7,693·10 <sup>1</sup>	4,461·10 <sup>2</sup>	3,610·10 <sup>3</sup>	3,749·10 <sup>4</sup>	4,758·10 <sup>5</sup>	7,138·10 <sup>6</sup>	1,237·10 <sup>8</sup>
10 <sup>8</sup>	$\overline{f}_{НСХ}^n$	5,251·10 <sup>2</sup>	3,899·10 <sup>3</sup>	4,020·10 <sup>4</sup>	5,291·10 <sup>5</sup>	8,677·10 <sup>6</sup>	1,717·10 <sup>8</sup>	4,025·10 <sup>9</sup>
	$\overline{f}_{КОН}^n$	5,251·10 <sup>2</sup>	3,895·10 <sup>3</sup>	4,024·10 <sup>4</sup>	5,325·10 <sup>5</sup>	8,586·10 <sup>6</sup>	1,632·10 <sup>8</sup>	3,569·10 <sup>9</sup>
10 <sup>4</sup>	$\overline{f}_{НСХ}^n$	6,763·10 <sup>2</sup>	4,892·10 <sup>3</sup>	4,925·10 <sup>4</sup>	6,356·10 <sup>5</sup>	1,023·10 <sup>7</sup>	2,005·10 <sup>9</sup>	4,672·10 <sup>9</sup>
	$\overline{f}_{КОН}^n$	6,763·10 <sup>2</sup>	4,886·10 <sup>3</sup>	4,933·10 <sup>4</sup>	6,395·10 <sup>5</sup>	1,013·10 <sup>7</sup>	1,898·10 <sup>8</sup>	4,108·10 <sup>9</sup>
<b>Приближение Б</b>								
10 <sup>4</sup>	$\overline{f}_{НСХ}^n$	6,080·10 <sup>2</sup>	3,698·10 <sup>3</sup>	2,794·10 <sup>4</sup>	2,508·10 <sup>5</sup>	2,603·10 <sup>6</sup>	3,067·10 <sup>7</sup>	4,042·10 <sup>8</sup>
	$\overline{f}_{КОН}^n$	6,080·10 <sup>2</sup>	3,706·10 <sup>3</sup>	2,792·10 <sup>4</sup>	2,501·10 <sup>5</sup>	2,595·10 <sup>6</sup>	3,064·10 <sup>7</sup>	4,064·10 <sup>8</sup>

Расчет проведен для интегральной фотонной кривой  $N_{\Gamma}(E, t)$  в приближении В с учетом рассеяния для нескольких значений  $E_0/E$ .

Из табл. 2 видно, что при  $E_0/E=10$  «исходные» и «конечные» моменты 4÷6-й степеней совпадают с точностью  $\sim 0,1-0,5\%$ . В этой области энергий комптон- и фотоэффект несущественны, а сечения образования пар и радиационного торможения мало отличаются от асимптотических значений, задаваемых аналитическими выражениями. С увеличением  $E_0/E$  согласие между «исходными» и «конечными» моментами 4÷6-й степеней ухудшается и при  $E_0/E=10^4$  составляет соответственно 1%, 5 и 10%. Для сравнения в табл. 2 приведен также результат аналогичного расчета в приближении Б, в котором таблично заданные сечения не используются. Несмотря на большое значение  $E_0/E$ , согласие «исходных» и «конечных» моментов здесь хорошее.

Увеличение степени полинома в выражении (1) мало меняет ситуацию, т. е. использование моментов 4÷6-й степеней при восстановлении функции не улучшает их согласия с «конечными» моментами, если при этом не менять функцию  $W(t)$ . Выбор функции  $W(t)$ , обеспечивающий согласие моментов высоких степеней, портит это согласие для моментов 1÷3-й степеней. Таким образом, из-за погрешности в моментах высоких степеней в приближении В невозможно подобрать такую гладкую кривую, которая обеспечила бы хорошее согласие всех моментов.

Обсуждение методики восстановления каскадной кривой по моментам можно завершить следующими рекомендациями, которых мы будем придерживаться в дальнейшем. Каскадную кривую с разумной точностью (единицы процентов) можно получить по 4—5 моментам, при этом 6-й и 7-й моменты можно вычислять для контроля. Параметры весовой функции  $W(t)$  будем выбирать таким образом, чтобы согласие «исходных» и «конечных» моментов монотонно ухудшалось с увеличением степени момента, как это показано в табл. 2.

Перейдем теперь к обсуждению результатов расчета для конкретной среды. На рис. 2, 3 приведены интегральные электронные каскад-

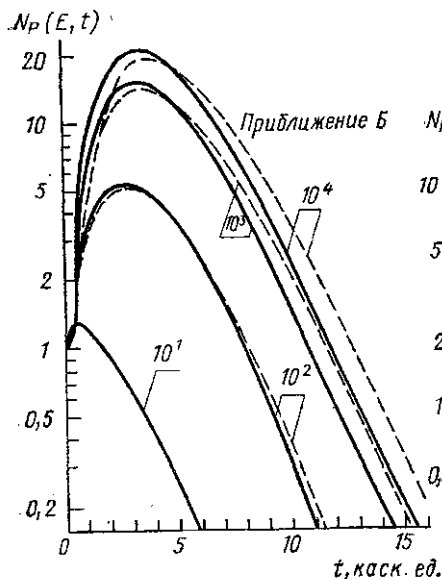


Рис. 2

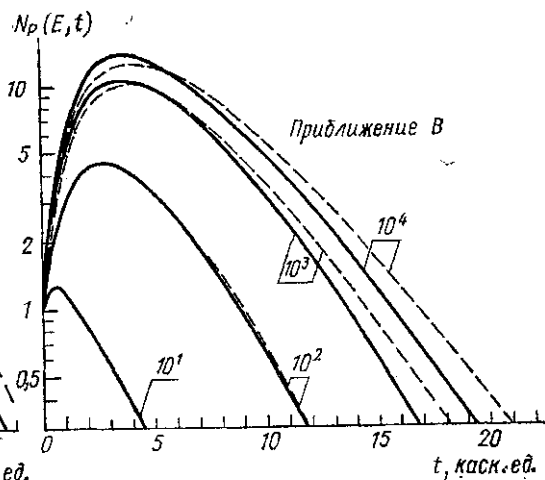


Рис. 3

ные кривые  $N_p(E, t)$ , а на рис. 4, 5 — фотонные каскадные кривые  $N_r(E, t)$ , восстановленные по моментам, полученным в [1]. Расчет проведен для ливня от первичного электрона энергии 1 ГэВ в свинце в приближении Б (рис. 2, 4) и В (рис. 3, 5). Величины  $E_0/E$  указаны рядом с кривыми. Сплошные кривые получены с учетом, пунктирные — без учета рассеяния.

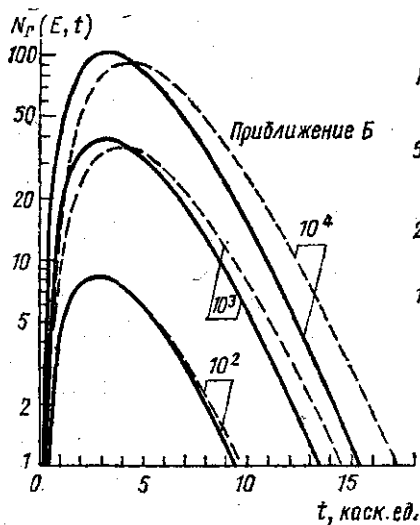


Рис. 4

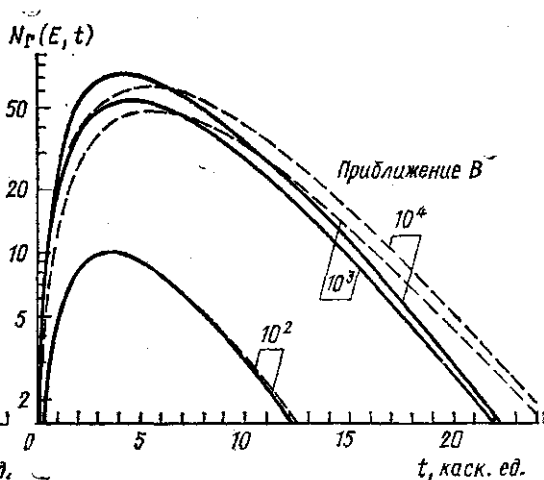


Рис. 5

Известно, что значения каскадных кривых в области максимума в приближении А примерно пропорциональны  $E_0/E$  [3]. Число фотонов в максимуме ливня незначительно ( $\sim 10\%$ ) превосходит число электронов. Учет ионизационных потерь приводит к подавлению низкоэнергетичной компоненты ливня. На рис. 2, 4 это проявляется в кручении спада каскадных кривых по сравнению с приближением А. В приближении Б число фотонов в максимуме ливня при  $E_0/E=10^4$  сокращается по сравнению с приближением А примерно в 8 раз, при  $E_0/E=10^3$  — в 2 раза, при  $E_0/E=10^2$  — на 20%. На числе электронов ионизационные потери сказываются еще сильнее, особенно при больших  $E_0/E$ : при  $E_0/E=10^4$  электронов в максимуме ливня в 5 раз, при  $E_0/E=10^3$  — в 2,5 раза, при  $E_0/E=10^2$  — в 2 раза меньше, чем фотонов. Из-за уменьшения числа низкоэнергетичных электронов электронные кривые для  $E_0/E=10^3$  и  $E_0/E=10^4$  сближаются.

Переход к приближению В, напротив, больше сказывается на фотонах вследствие сильной зависимости полного сечения поглощения фотонов  $\sigma$  от энергии. Максимум электронных кривых несколько понижается для всех значений  $E_0/E$ ; максимумы фотонных кривых при различных  $E_0/E$  ведут себя по-разному. При  $E_0/E=10^2$  и  $10^3$  максимумы повышаются, так как при  $1 \text{ МэВ} \leq E \leq 10^3 \text{ МэВ}$   $\sigma$  меньше своего асимптотического значения  $\sigma_0=0,77$ , используемого в приближении Б. При  $E \leq 1 \text{ МэВ}$ , наоборот, за счет фото- и комптон-эффекта  $\sigma > \sigma_0$  и максимумы ниже, чем в приближении Б. Фотонные кривые при  $E_0/E=10^3$  и  $10^4$  близки вследствие сильного поглощения низкоэнергетичных фотонов за счет этих двух эффектов. Число фотонов в максимуме ливня

превосходит число электронов: при  $E_0/E=10^4$  и  $10^3$  — в 5 раз, при  $E_0/E=10^2$  — в 2 раза.

Уменьшение  $\sigma$ , т. е. увеличение длины свободного пробега фотонов приводит к тому, что каскадная кривая становится более широкой, а ее максимум смещается в сторону больших  $t$ . Учет рассеяния соответствует увеличению сечения поглощения электронов и оказывает на каскадные кривые обратное действие. В целом можно сказать, что каскадные кривые менее чувствительны к учету рассеяния, нежели к деталям описания сечений других элементарных взаимодействий (переход от приближения Б к В). В рассматриваемом интервале энергий и глубин учет рассеяния вносит поправку, не превышающую 60%, а в максимуме каскадной кривой поправка не превышает 20%. В этом отличие настоящих результатов от расчетных данных, полученных в работе [5], где различие каскадных кривых с учетом и без учета рассеяния достигает трехкратного. Это, по-видимому, связано с тем, что учет рассеяния в [5] проводился в рамках приближения Ландау, которое сильно завышает этот эффект для малых энергий.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Иваненко И. П., Сизов В. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1988. 29, № 2. С. 21. [2] Беленький С. З., Иваненко И. П. // УФН. 1959. 69. С. 591; Иваненко И. П., Самосудов Б. Е. // Ядерная физика. 1967. 5. С. 622. [3] Беленький С. З. Лавинные процессы в космических лучах. М., 1948. [4] Беляев А. А. и др. Электронно-фотонные каскады в космических лучах при сверхвысоких энергиях. М., 1980. [5] Иваненко И. П., Самосудов Б. Е. // Изв. АН СССР, сер. физ. 1966. 30. С. 1651.

Поступила в редакцию  
26.11.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 3

УДК 537.56

### ОЦЕНКИ СЕЧЕНИЙ ИОНИЗАЦИИ АТОМОВ ВОДОРОДА И ГЕЛИЯ АТОМНЫМИ ЯДРАМИ

В. А. Сидорович

(НИИЯФ)

В рамках метода параметра удара и приближения независимых электронов получены аппроксимационные формулы для сечений ионизации водорода и одно- и двукратной ионизации гелия быстрыми атомными ядрами.

**§ 1. Введение.** В настоящее время наиболее употребляемыми в расчетах сечений неупругих переходов в ионно-атомных столкновениях является борновское приближение и метод параметра удара. Последний особенно часто применяется при исследовании различных многоэлектронных переходов. Однако борновское приближение несправедливо, когда  $Z/v \gg 1$  ( $Z$  — заряд налетающего иона,  $v$  — его скорость). В таких случаях приходится пользоваться более сложными приближениями, например такими, как метод сильной связи каналов [1, 2] или приближение внезапных возмущений [3]. При использовании метода параметра удара в задачах столкновения атомов с многозарядными ионами борновские вероятности неупругих переходов могут оказаться больше максимального возможного значения, равного единице. Для устранения этого дефекта применяют различные способы нормировки вероятностей неупругих переходов (см., напр., [4–8]). Точные