

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145.6

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ В КИНКОВОМ СЕКТОРЕ

К. А. Свешников

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Рассматривается общий подход на языке гейзенберговских операторов к определению структуры базиса асимптотических состояний фундаментальных частиц в кинковом секторе квантово-полевой системы в 1+1 измерениях, основанный на анализе движения кинка относительно центра инерции системы за счет импульса отдачи.

В настоящей работе рассматриваются характерные особенности структуры базиса асимптотических состояний фундаментальных частиц в кинковом секторе квантово-полевой системы, состоящей из взаимодействующих нелинейного бозонного и фермионного полей в 1+1 измерениях с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 - U(\Phi) + \bar{\Psi} (i\hat{\partial} - G\Phi) \Psi. \quad (1)$$

Модель (1) является релятивистским динамическим аналогом процессов в статистической механике квазиодномерных электрон-фоонных систем [1]. Бозонное поле имеет обусловленную самодействием классическую составляющую, соответствующую частицеподобному протяженному объекту типа кинка или солитона,

$$\Phi_{кл}(x, t) = u((x - vt)/\sqrt{1 - v^2}), \quad \frac{1}{2} u'^2(y) = U(u(y)). \quad (2)$$

Для описания поведения системы на фоне классической составляющей такого типа существует несколько адекватных подходов (в качестве обзоров см. [2, 3]). Наиболее полное и последовательное описание дает рассмотрение гейзенберговских полей [4, 5]. Асимптотические состояния в этом подходе строятся непосредственно с помощью хорошо обоснованного формализма Лемана—Симанзика—Циммерманна (ЛСЦ) [6]. В настоящей работе в таком подходе будет рассмотрен общий метод определения фаз рассеяния фундаментальных частиц (бозонов и фермионов) на кинке. Для фермионов такая задача ранее не рассматривалась.

Спектр квантованных возбуждений определяется из линеаризованных уравнений движения и перестановочных соотношений в окрестности составляющей (2), которые в системе центра масс имеют вид [4, 5]:

$$(\square + v(x))\Phi(x, t) = 0, \quad v(x) = U''(u(x)), \quad (3a)$$

$$(i\hat{\partial} - Gu(x))\chi(x, t) = 0, \quad (3b)$$

$$[\Phi(x, t), \partial_t \Phi(x', t)]_- + iM^{-1}u'(x)u'(x') = i\delta(x - x'), \quad (4a)$$

$$[\chi(x, t), \chi^+(x', t)]_+ = \delta(x - x'), \quad (4b)$$

где $M = \int dy u'^2(y)$ — классическая масса кинка, остальные коммута-

торы и антикоммутизаторы соответственно равны нулю. При этом бозонное поле $\Phi(x, t)$ должно удовлетворять условию $0 = \int dx \psi'(x) \Phi(x, t)$, обеспечивающему совместно с (4а) исключение трансляционной голдстоуновской моды из бозонного спектра возбуждений [7, 8]. Полная энергия системы в этом приближении сводится к оператору

$$H = M + \int dx \left\{ \frac{1}{2} \Phi^2 + \frac{1}{2} \Phi'^2 + \frac{1}{2} v(x) \Phi^2 + \chi^+ \left(\frac{\alpha}{i} \partial_x + \beta v(x) \right) \chi \right\}. \quad (5)$$

Начнем с бозонного поля. Эта задача уже рассматривалась в [4, 5], поэтому мы здесь лишь кратко остановимся на основных моментах и уточнениях полученных в [5] соотношений, необходимых для дальнейшего. Решением (3а) является

$$\Phi(x, t) = \sum_f (2\omega_f)^{-1/2} (a_f e^{-i\omega_f t} \varphi_f(x) + \text{к. с.}), \quad (6)$$

где $\{\varphi_f\}$ есть полный ортонормированный набор собственных функций спектральной задачи

$$(-\partial^2/\partial x^2 + v(x)) \varphi_f = \omega_f^2 \varphi_f \quad (7)$$

без нулевой моды $\sim u'(x)$, т. е. $\omega_f > 0$; a_f и a_f^+ — операторы рождения—уничтожения бозона с частотой ω_f : $[a_f, a_f]_- = 0$, $[a_f, a_f^+]_- = \delta_{ff'}$.

Спектр оператора (7) состоит из дискретной части $0 < \omega_n < m_B = \sqrt{v(\pm\infty)}$ и из непрерывного спектра, каждое собственное значение которого $\omega_k = (m_B^2 + k^2)^{1/2}$ двукратно вырождено по k , при этом $\varphi_{-k} = \varphi_k^*$.

В силу таких свойств спектра уравнения (3а) ЛСЦ-асимптотика поля $\Phi(x, t)$ состоит из двух слагаемых. Дискретные моды войдут в нее без изменения, а непрерывный спектр образует плосковолновую часть асимптотики, которая имеет вид свободного квантового поля бозонов массы m_B :

$$\Phi_{in}^{out}(x, t) = \Phi(x, t)_{дискр} + (2\pi)^{-1/2} \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} (a_{in}^{out}(k) e^{-i\omega_k t + ikx} + \text{к. с.}). \quad (8)$$

Асимптотическое ЛСЦ-условие дает

$$a_{in}^{out}(k) = \omega \cdot \lim_{t \rightarrow \pm\infty} i \int dx \frac{\exp(i(\omega_k t - kx))}{\sqrt{2\pi \cdot 2\omega(k)}} \overleftrightarrow{\partial}_t \frac{\exp(-i\omega_l t)}{\sqrt{2\omega(l)}} \varphi_l(x) a_l.$$

Вычисление этого предела хорошо известно [4, 5]. Для дальнейшего нам удобно сформулировать конечный результат в следующем виде: если

$$\varphi_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} (X_{\pm}(k) e^{ikx} + Y_{\pm}(k) e^{-ikx}) / \sqrt{2\pi}, \quad (9)$$

то

$$a_{in}^{out}(k) = \theta(\pm k) (X_+(k) a(k) + Y_+(-k) a(-k) + \theta(\mp k) (X_-(k) a(k) + Y_-(-k) a(-k))). \quad (10)$$

В силу легко проверяемых свойств собственных функций непрерывного спектра задачи (7) коэффициенты $X_{\pm}, Y_{\pm}(k)$ следующим образом однозначно связаны с обычными данными рассеяния (коэффициентами прохождения и отражения $t(k)$ и $r(k)$):

$$\begin{aligned} X_{-}(k) &= [(1 + |t(k)|)/2]^{1/2}, \quad X_{+}(k) = \exp(i\delta_T(k)) [(1 + |t(k)|)/2]^{1/2}, \\ Y_{-}(k) &= \exp(i\delta_R(k)) [(1 - |t(k)|)/2]^{1/2}, \quad Y_{+}(k) = -\exp(i\delta_R(k) - \\ &- i\delta_T(k)) [(1 - |t(k)|)/2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\delta_T(k) = \arg t(k)$, $\delta_R(k) = \arg r(k)$.

Легко убедиться в том, что соотношение (11) описывает унитарное преобразование в непрерывной части спектра бозонных возбуждений

$$[a_{in}(k), a_{in}^{+}(k')]_{-} = [a_{out}(k), a_{out}^{+}(k')]_{-} = \delta(k - k') \quad (12)$$

с явно унитарной матрицей перехода (матрицей рассеяния) между асимптотическими in- и out-базисами

$$\begin{aligned} [a_{out}(k), a_{in}^{+}(k')]_{-} &= t(k) \delta(k - k') + (\theta(-k) r^{*}(k) - \\ &- \theta(k) \exp(2i\delta_T(k)) r^{*}(k)) \delta(k + k'). \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношения (12), (13) гарантируют полноту и унитарную эквивалентность in- и out-состояний бозонного поля в непрерывном спектре. Коэффициенты в правой части (13) определены однозначно и с точностью до фазы совпадают с коэффициентами прохождения и отражения. Для вклада от бозонов в гамильтониан (5) в соответствии с общей теорией [6] из (10) находим $H_{\delta_3} = \sum_f \omega_f a_f^{+} a_f = \sum_f \omega_f a_{f in}^{+ out} a_{f in}^{out}$.

Теперь следует учесть, что в системе центра масс всего поля при возникновении квантованного возбуждения классический пакет также движется за счет импульса отдачи [5, 9]. Поэтому для построения полной матрицы рассеяния для кинкового сектора в этом приближении нам необходимо еще иметь в явном виде асимптотические параметры кинкового движения, поскольку полная матрица рассеяния должна связывать асимптотики как квантованной компоненты, так и классической составляющей бозонного поля. В рассматриваемом приближении вклад бозонов в смещение кинка относительно центра масс системы описывается оператором [5, 9]

$$\Delta(t) = M^{-1} \int x dx \left\{ \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2} \Phi'^2 + \frac{1}{2} v(x) \Phi^2 \right\} (x, t). \quad (14)$$

Так же как и асимптотика поля, асимптотика этого оператора будет состоять из аддитивных вкладов дискретных мод и непрерывного спектра. Для последнего аналогичная вычислению a_{in}^{out} , но несколько более утомительная процедура дает

$$\begin{aligned} \Delta_{in}^{out}(t) &= \Delta(t)_{\text{дискр}} + (2M)^{-1} \{ t \int k dk [a_{in}^{+ out}(k), a_{in}^{out}(k)]_{+} + \\ &+ (i/2) \int dk \omega(k) (a_{in}^{+ out}(k) \vec{\partial}_k a_{in}^{out}(k) - a_{in}^{out}(k) \vec{\partial}_k a_{in}^{+ out}(k)) \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) в полном соответствии с законами сохранения находим, что асимптотическая скорость и смещение кинка относительно центра масс системы есть (—импульс квантованной компоненты поля/М) и (—буст квантованной компоненты/М) соответственно. Из (15) видно, что существует ненулевое изменение асимптотических скорости и смещения кинка. Это изменение полностью обусловлено динамикой квантованной компоненты: оператор, переводящий Φ_{in} в Φ_{out} , будет одновременно описывать переход из Δ_{in} в Δ_{out} .

Таким образом, у бозонного поля нетривиальная матрица рассеяния существует в кинковом секторе уже в нулевом приближении по константе связи. Она описывает рассеяние фундаментальных частиц поля на кинке. Одночастичные матричные элементы S -матрицы задаются формулой (13). Как следует из (8), (15), состояниями рассеяния являются состояния из непрерывного спектра. Дискретные моды являются стационарными состояниями и описывают связанные состояния бозона и кинка.

Теперь рассмотрим фермионное поле. В этом случае также уже в нулевом приближении существует нетривиальная S -матрица, описывающая рассеяние фермионов на кинке. Но в отличие от бозонного случая рассмотрение асимптотического поведения фермионного поля требует некоторой модификации формализма. Суть сложностей состоит в том, что если $u(+\infty) \neq u(-\infty)$, а именно это и характерно для кинковой конфигурации, то прямолинейное применение ЛСЦ-процедуры невозможно. Пусть для определенности кинковое поле является нечетной функцией аргумента $u(x) = -u(-x)$, $u(\pm\infty) = \pm u_0$, и $Gu_0 > 0$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$ мы имеем нормальный массовый член, при $x \rightarrow -\infty$ это слагаемое меняет знак. Поэтому поле $\chi(x, t)$, удовлетворяющее уравнению (36), в непрерывном спектре не может иметь в качестве ЛСЦ-асимптотики свободное поле Дирака соответствующей массы.

В таком случае будем действовать следующим образом. Решение (36) имеет вид

$$\chi(x, t) = \sum_l (b_l e^{-iv_l t} \chi_l^{(+)}(x) + d_l^+ e^{iv_l t} \chi_l^{(-)}(x)), \quad (16)$$

где

$$(-i\alpha\partial_x + G\beta u(x)) \chi_l^{(\pm)} = \pm v_l \chi_l^{(\pm)}, \quad v_l \geq 0, \quad (17)$$

и b_l^+ , b_l , d_l^+ , d_l — операторы рождения—уничтожения (анти)фермиона $[b_l, b_l^+]_+ = [d_l, d_l^+]_+ = \delta_{ll'}$, $[b_l, b_{l'}]_+ = [d_l, d_{l'}]_+ = [b_l, d_{l'}]_+ = [b_l, d_l^+]_+ = 0$. Спектр собственных значений операторов Дирака (17) состоит из дискретных мод с частотами $0 \leq |v_m| < m_F = Gu_0$ и из непрерывного спектра с $v_p^2 = p^2 + m_F^2$. Непрерывный спектр дважды вырожден по волновому числу p и $\chi_p = \chi_{-p}^*$. При этом если

$$\chi_p^{(a)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} (X_{\pm}^{(a)}(p) e^{ipx} + Y_{\pm}^{(a)} e^{-ipx}) / \sqrt{2\pi}, \quad a = 1, 2, \quad (18)$$

то

$$X_{\pm}^{(1)}(p) = \pm e^{\mp i\delta(p)} X_{\pm}^{(2)}(p), \quad Y_{\pm}^{(1)}(p) = \pm e^{\pm i\delta(p)} Y_{\pm}^{(2)}(p), \quad \text{tg } \delta(p) = p/m_F. \quad (19)$$

То, что данные рассеяния для верхней и нижней компонент отличаются друг от друга на фазу, знак которой зависит от знака пространственной бесконечности, есть следствие поведения потенциала в уравнении Дирака (17). С помощью (18), (19) можно непосредственным вычислением убедиться в том, что ЛСЦ-пределы для верхней и нижней компонент имеют различные фазы. Гамильтониан (5) к фазе фермионов нечувствителен. При любом выборе фаз коэффициентов в аналогичной (10) формуле для асимптотических фермионных операторов будет $H_{\text{фм}} = \sum_l v_l (b_l^+ b_l + d_l^+ d_l) = \sum_l v_l (b_l^+ b_l + d_l^+ d_l)_{\text{in}}^{\text{out}}$. В таком слу-

чае в непрерывном спектре фермионного поля в качестве асимптотических естественно принять операторы, диагонализующие фермионный

вклад в асимптотику оператора смещения кинка относительно центра масс системы $\Delta(t)$ аналогично тому, как преобразование (10) диагонализует бозонный вклад (15). В рассматриваемом приближении фермионный вклад в $\Delta(t)$ есть [9]

$$\Delta(t)_{\text{фм}} = M^{-1} \int dx d\chi \chi^+ (-i\alpha \partial_x + G\beta u(x)) \chi(x, t). \quad (20)$$

Проводя аналогичную бозонному случаю выкладку, получим, что диагонализующей подстановкой для выражения (20) будет

$$b_{\text{in}}^{\text{out}}(p) = \theta(\pm p) (\tilde{X}_+(p) b_p + \tilde{Y}_+^*(p) b_{-p}) + \theta(\mp p) (\tilde{X}_-(p) b_p + \tilde{Y}_-^*(p) b_{-p}), \quad (21a)$$

$$d_{\text{in}}^{\text{out}}(p) = \theta(\pm p) (\tilde{X}_+(p) d_p + \tilde{Y}_+^*(p) d_{-p}) + \theta(\mp p) (\tilde{X}_-(p) d_p + \tilde{Y}_-^*(p) d_{-p}), \quad (21b)$$

где

$$\tilde{X}_{\pm}(p) = \pm e^{\mp i\delta(p)/2} X_{\pm}^{(2)}(p), \quad \tilde{Y}_{\pm}(p) = \pm e^{\pm i\delta(p)/2} Y_{\pm}^{(2)}(p). \quad (22)$$

Прямым вычислением можно убедиться, что выраженная через операторы (21), (22) непрерывная часть оператора (20) есть

$$\Delta_{\text{фм}}^{\text{ас}} = M^{-1} \left\{ t \int p dp (b_{\text{ас}}^+(p) b_{\text{ас}} p - d_{\text{ас}}(p) d_{\text{ас}}^+(p)) + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \int v_p dp (b_{\text{ас}}^+(p) \overleftrightarrow{\partial}_p b_{\text{ас}}(p) - d_{\text{ас}}(p) \overleftrightarrow{\partial}_p d_{\text{ас}}^+(p)) \right\}. \quad (23)$$

Таким образом, через операторы (21) асимптотические импульс и буст непрерывной части фермионного поля оказываются в точности такими, какие должны быть у свободного поля Дирака. Задающие преобразование (21) коэффициенты $\tilde{X}_{\pm}$, $\tilde{Y}_{\pm}$ при этом суть «средние по фазе» между коэффициентами рассеяния для верхней и нижней спинорных компонент. Как и в бозонном случае, состояния в непрерывном спектре оказываются состояниями рассеяния. Матричные элементы одночастичного рассеяния фермионов на кинке задаются формулой (13) с заменой $X_{\pm}$, $Y_{\pm}$ на соответствующие коэффициенты с тильдой. Дискретные моды являются стационарными состояниями и соответствуют связанным комплексам кинк+фермион. Со многих точек зрения эти комплексы представляют большой интерес, но обсуждение этого вопроса выходит далеко за рамки настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jackiw R., Schrieffer J. R.//Nucl. Phys. 1981. B190 [FS3]. P. 253; Campbell D. K., Bishop A. R.//Nucl. Phys. 1982. B200 [FS4]. P. 297. [2] Faddeev L. D., Korepin V. E.//Phys. Reports. 1978. C42, N 1. P. 1. [3] Раджараман Р. Солитоны и инстантоны. М., 1985. [4] Steinmann O.//Nucl. Phys. 1977. B131. P. 459. [5] Свешников К. А.//ТМФ. 1983. 55, № 3. С. 361. [6] Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. М., 1978. Т. 2. [7] Khristalev O. A., Razimov A. V., Taganov A. Yu.//Nucl. Phys. 1980. B172. P. 44. [8] Тверской В. Б.//ТМФ. 1986. 68, № 3. С. 338. [9] Свешников К. А.//ТМФ. 1988. 74, № 3. С. 373.

Поступила в редакцию
13.01.87