

УДК 517.928.4:519.633.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ЗАДАЧИ НАГРЕВА ТОНКИХ ПЛАСТИН ОБЛУЧЕНИЕМ

В. Б. Гласко, А. Ю. Губарь, А. Б. Коршунов

(кафедра математики)

Предложен алгоритм редукции нестационарной квазилинейной одномерной задачи для уравнения теплопроводности к более простым задачам. Доказана возможность такой редукции. Проведено численное решение и сравнение с результатами физического эксперимента.

Асимптотический анализ оказывается эффективным для построения быстродействующих алгоритмов решения ряда задач [1, 2].

В настоящей работе дается обоснование таких алгоритмов для решения задачи нагрева образцов с помощью мощного светового пучка. Подобная методика все чаще применяется в последнее время во многих процессах термической обработки деталей. При этом из-за резкого сокращения времени обработки аппаратура измерения температуры нередко становится непригодной, и возникает потребность расчета температуры нагреваемого образца в зависимости от режима облучения.

1. Процесс отжига полупроводниковых образцов, толщина которых l значительно меньше поперечных размеров $r: l \ll r$, под действием монохроматического излучения, подаваемого в импульсно-периодическом режиме с высокой скважностью (рис. 1), во многих случаях может

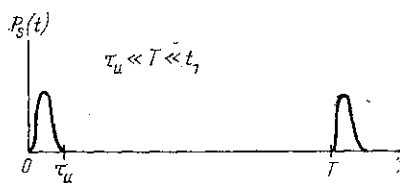


Рис. 1

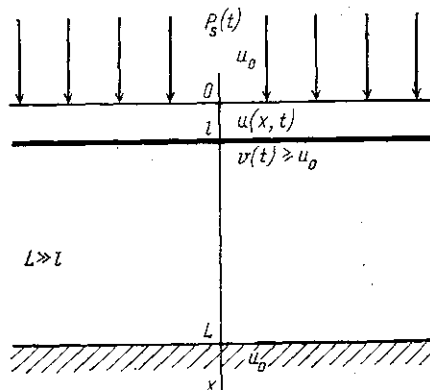


Рис. 2

быть описан в рамках пространственно-одномерной модели (рис. 2) условиями следующей задачи для уравнения теплопроводности:

$$u|_{t=0} = u_0 = \text{const}, \quad (1)$$

$$(k(u)u_x)_x + F(x, t; u) = c(u)u_t, \text{ в области } Q_1 = \{x \in (0; l); t \in (0; t_1)\}, \quad (2)$$

$$k(u)u_x = \lambda_0(u - u_0), \quad x = 0, \quad (3)$$

$$k(u)u_x = \lambda_2(v(t) - u), \quad x = l. \quad (4)$$

Здесь $u(x, t)$ — температура образца, $k(u)$ и $c(u)$ — теплопроводность и объемная теплоемкость. Если $u_1 > u_0$ — нижний предел температуры, до которой требуется нагреть образец, то t_1 определяется условием $u_{\min}(t_1) = \min_{x \in [0, l]} u(x, t_1) = u_1$. Предполагается, что на нижней границе

образца ($x=l$) теплообмен с подложкой, температуру которой будем для простоты считать заданной неубывающей функцией времени $v(t) \geq u_0$, происходит через газовую прослойку толщины $\delta \ll l$ и является ньютоновским с коэффициентом теплоотдачи $\lambda_1 = k_r/\delta$ [3], где k_r — коэффициент теплопроводности газа. Если образец находится в турбулентном потоке газа с числом Рейнольдса $Re > 8 \cdot 10^4$, теплообмен можно также считать ньютоновским и $\lambda_0 = 0,033(k_r/r)(Re)^{0,8}$ [4, 5]. При температурах до 1300 К естественной конвекцией и излучением Стефана—Больцмана можно пренебречь [3].

Количество тепла $F(x, t; u)$, выделяемое в образце за счет поглощения энергии излучения с учетом многократного отражения луча, определяется формулами

$$F(x, t; u) = \pi(t) Q(x; \alpha), \quad \pi(t) = P_s(t)(1-R), \quad Q(x; \alpha) = \alpha(u) \frac{e(x; \alpha) - R_r e(l; \alpha)^2 / e(x; \alpha)}{1 - RR_r e(l; \alpha)^2},$$

где $P_s(t)$ — плотность потока энергии в падающем луче; $R_r = (R + R_p - 2RR_p)/(1 - RR_p)$, R и R_p — коэффициенты отражения образца и подкладки; $e(x; \alpha) = \exp\left\{-\int_0^x \alpha(u(\xi, t)) d\xi\right\}$, $\alpha(u)$ — коэффициент по-

глощения света. Характерно, что $\alpha(u)$, а стало быть, амплитуда теплового источника, быстрорастущая функция и $\lim_{u \rightarrow \infty} \alpha(u) \geq 10^6 \text{ см}^{-1}$ (рис. 3).

Ввиду нелинейности задача (1)–(4) может быть решена только численно. Однако прямое использование численных методов неэффективно по следующим причинам:

$$1) Q(x, \alpha) \rightarrow \begin{cases} \infty, & x=0, \\ 0, & x>0, \end{cases}$$

и быстрый рост α приводит к измельчению шага интегрирования и накоплению ошибок счета;

2) аналогичным образом влияет периодический характер импульсного воздействия источника, т. е. поведение $\pi(t)$ при $\tau_n \ll T \ll t_1$.

Экономичный вычислительный алгоритм строится на основе некоторых предельных постановок задачи, обоснование которых проведено ниже.

2. Избавиться от трудностей, связанных с быстрым ростом α , можно следующим образом. Пусть к некоторому моменту t_0 $\alpha(u)l \gg 1$, тогда формально устремляя $\alpha \rightarrow \infty$, получим задачу, не содержащую α :

$$\hat{u}|_{t=t_0} = \tilde{u}_0(x) \quad (5)$$

(здесь $\tilde{u}_0(x)$ — решение задачи (1)–(4) при $t=t_0$),

$$(k(\hat{u})\hat{u}_x)_x = c(\hat{u})\hat{u}_t \text{ в } Q = \{x \in (0; l); t \in (t_0; t_1)\}, \quad (6)$$

$$k(\hat{u})\hat{u}_x = -\pi(t) + \lambda_0(\hat{u} - u_0), \quad x=0, \quad (7)$$

$$k(\hat{u})\hat{u}_x = \lambda_1(v(t) - \hat{u}), \quad x=l. \quad (8)$$

Возникает вопрос о близости решений задач (5) — (8) и (1) — (4) в Q , ответ на который дает следующая

Теорема 1. Пусть: 1) $k \in C^2(u_0; u_1)$, $c \in C'(u_0; u_1)$, $k' \leq 0$, $(\ln k)'' \geq 0$, $c' \geq 0$ при $u \in [u_0, u_1]$; 2) существует единственное решение ε_m уравнения $\Phi(u_1, \lambda) = \lambda$, где $\Phi(u, \lambda) \equiv \alpha(u) l \exp(-\alpha(u) \lambda l)$; 3) $\alpha(u)$ — возрастающая функция на $[u_0, \infty)$, но $\Phi(u, \lambda)$ — убывающая для лю-

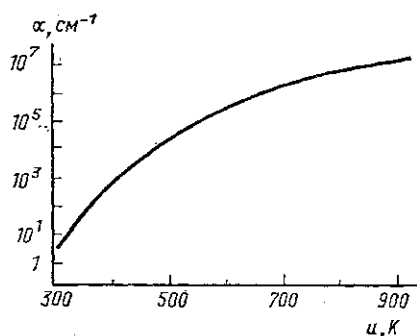


Рис. 3

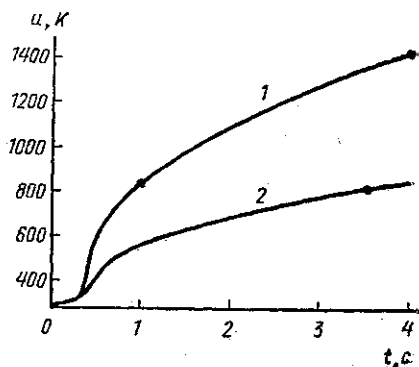


Рис. 4

бого $\lambda \geq \varepsilon_m > 0$; 4) $\lambda = \varepsilon$ — решение уравнения $\Phi(u_m, \varepsilon) = \varepsilon$, где $u_m = \min_Q u(x, t) = u_m(t_0)$, $u(x, t)$ — решение задачи (1) — (4). Тогда существует

$$M = M(l, t_1 - t_0, c(u_m), c(u_1), k(u_m), \lambda_0, \max_{0 < \tau < \tau_n} \pi(\tau)) > 0$$

такая, что

$$\|\hat{u} - u\|_{C_Q} \leq (M + \|\hat{u}_x\|_{C_Q} l) 2\varepsilon, \text{ где } \|\hat{u}_x\|_{C_Q} \leq \frac{1}{k(u_1)} \max\{|v(t_1) - u_m| \lambda_1; | \max_{0 < \tau < \tau_n} \pi(\tau) - \lambda_0 (u_m - u_0) |; \lambda_0 (u_1 - u_0) |\} \varepsilon$$

Заметим, что в нашей задаче условия 2) и 3) выполнены по определению $\alpha(u)$ и в рассматриваемой области значений параметров. Безразмерную величину ε можно рассматривать как малый параметр: $\varepsilon \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$. Ее асимптотическое поведение при $a \equiv \alpha(u_m) l \gg 1$ дается формулой $\varepsilon = ((\ln a^2 - \ln \ln a^2)/a) (1 + O(\ln^{-1}(a^2)))$, а ее значения в рабочем диапазоне параметров заключены в пределах $0,01 \leq \varepsilon \leq 0,05$.

Для доказательства этой теоремы задача (1) — (4) разбивается на две: в области $Q_l = \{x \in (\varepsilon l; l); t \in (t_0; t_1)\}$ и в области $Q_* = Q \setminus Q_l$. Условия при $x = \varepsilon l$ получаются интегрированием (2) от $x = 0$ до $x = \varepsilon l$ с учетом (3):

$$k(u) u_x|_{x=\varepsilon l} = \lambda_0 (u - u_0)|_{x=0} + c(u) u_t|_{x=\varepsilon l} - \pi(t) (1 - o(\varepsilon)).$$

Из определения параметра $\varepsilon: Q(x, \alpha) = O(\varepsilon)$ в Q_l . Рассматривая далее задачу (1) — (4) как регулярное возмущение [6, 7] задачи (5) — (8) в Q_l , можно получить оценку погрешности нулевого приближения: $\|u - \hat{u}\|_{C_{Q_l}} \leq M\varepsilon$ и конкретный вид мажоранты M . Затем в Q_* по определению равномерной нормы:

$$\|u - \hat{u}\|_{C_{Q_e}} \leq \max_{t \in [t_0, t_1]} \|u - \hat{u}\|_{x=el} + \|u_x - \hat{u}_x\|_{C_{Q_e}} el \leq \|u - \hat{u}\|_{C_{Q_l}} + (\|u_x\|_{C_Q} + \|\hat{u}_x\|_{C_Q}) el.$$

Применяя, наконец, к задачам для u_x и $\hat{u}_x$ оценки из работы [8], получим $\|u_x\|_{C_Q} \leq \|\hat{u}_x\|_{C_Q}$, что и завершит доказательство теоремы.

3. Вторая из отмеченных в п. 1 трудностей может быть устранена осреднением задачи по периоду повторения T подобно [9]:

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} v \, dt,$$

при этом $\pi(\bar{t}) = P = \text{const} > 0$ и осредненная задача получается из (1)–(4) или (5)–(8) заменой $\pi(t)$ на P , $v(t)$ на $\bar{v}(t)$. Для задачи (5)–(8) доказана теорема о близости ее решения к решению соответствующей осредненной задачи.

Теорема 2. Пусть 1) $k \in C^3(u_0, u_1)$, $c \in C^2(u_0, u_1)$, $F(x, t; u) \in C^{2,2;2}((0; l); (0, t_0); (u_0, u_m))$; $k' \leq 0$, $(\ln k)'' \geq 0$, $c' \geq 0$ при $u \in [u_0, u_1]$; 2) для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ $\frac{T}{c(u_m)lu_m} (P + \lambda_1(\bar{v}(t_1) - u_0)) \leq \varepsilon$. Тогда $\|\bar{u} - \hat{u}\|_{C_Q} \leq M\varepsilon^2$, где $\bar{u}(x, t)$ — решение осредненной задачи (5)–(8), а

$$M = M \left(l, t_1 - t_0, \int_0^l c'(\bar{u}) \bar{u}_t^2 dx \Big|_{t=t_0}^{t=t_1}, \int_{t_0}^{t_1} \left| (k'(\bar{u}) \bar{u}_t^2)_x \Big|_{x=0}^{x=l} dt, \int_0^l \frac{k(\bar{u}_0(x))}{c(\bar{u}_0)} \left(\left(\frac{1}{c} \right)' (k \bar{u}_{0x})^2 + \left(k \frac{(k \bar{u}_{0x})_x}{c(\bar{u}_0)} \right)^2 dx \right) > 0 \right]$$

Идея доказательства в том, что по условию 2) теоремы пропорциональная периоду T величина — малый параметр; при осреднении (5)–(8) с учетом гладкости коэффициентов получается задача для $\bar{u}$ с малым параметром $\varepsilon^2 \sim T^2$; искомая оценка сводится к оценке решения задачи первого приближения по ε^2 , которая находится стандартным путем [10].

4. Эффективный алгоритм, основанный на установленных выше фактах, предполагает разбиение временного интервала на две части: 1) $0 \leq t \leq t_0$, где t_0 выбирается так, чтобы условие (4) теоремы 1 было выполнено для заданного $\varepsilon > \varepsilon_m$; на этом интервале задача (1)–(4) может быть решена обычными численными методами; 2) $t_0 < t \leq t_1$, где t_1 определяется алгоритмически в соответствии с постановкой задачи; здесь решается осредненная задача (5)–(8).

Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 4, где кривые показывают зависимости $u_{\min}(t)$ для кремниевых образцов, лежащих на кварцевой подложке, при $\bar{P}_s = 191$ Вт/см², $l = 200$ мкм (кривая 1) и $\bar{P}_s = 100$ Вт/см², $l = 400$ мкм (кривая 2), а точками отмечены опытные данные. Сравнение результатов расчета с опытными данными показывает, что они согласуются в пределах точности эксперимента (5%).

Априорная грубая оценка максимально возможной при данных условиях нагрева температуры и времени ее установления может быть

получена на основе асимптотического анализа поведения решения осредненной задачи (5) — (8) при $t \rightarrow \infty$. В этом плане представляет интерес следующая

Теорема 3. Пусть u — решение осредненной задачи (5) — (8) при $v(t) \equiv u_0 = \text{const}$, $k(u) = 1/(k_0 + k_1 u)$, $k_0, k_1 > 0$, $c \in C'(u_0, u_1)$. Тогда u допускает асимптотическое представление при $t \rightarrow \infty$: $u = u_\infty(x) + e^{-mt} \times \times W(x) + o(e^{-mt})$, где $u_\infty(x) = (Ae^{-ax} - k_0)/k_1$, $A = e^{at} \left(\frac{1}{k(u_0)} + \frac{a}{\lambda_1} \right)$, a — корень трансцендентного уравнения: $a = Pk_1 - \lambda_0 \left(e^{at} \left[\frac{1}{k(u_0)} + \frac{a}{\lambda_1} \right] - \frac{1}{k(u_0)} \right)$, а $W(x) = e^{-ax} \varphi_m(x)$, где $m > 0$ — минимальное собственное значение, φ_m — соответствующая собственная функция задачи Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + \frac{c(u_\infty(x))}{k(u_\infty(x))} \mu \varphi = 0, \\ \varphi_x = \frac{\lambda_0}{k(u_\infty(0))} \varphi, \quad x = 0, \\ \varphi_x = -\frac{\lambda_1}{k(u_\infty(l))} \varphi, \quad x = l. \end{cases}$$

5. Полученные выше асимптотические оценки могут служить обоснованием модели тонкого тела, используемой при малых l [11]. В этой модели полагают $u(x, t) = u(t) + \delta u(x, t)$ и для ее состоятельности необходимо

$$\sup_{[0; l_1]} \left| \frac{\sup_{[0; l]} |\delta u|}{u(t)} \right| \leq \sup_{[0; l]} \frac{\text{var } u(x, t)}{u_{\min}(t)} \leq \frac{l \|u_x\|_{C_{Q_1}}}{u_0} \equiv \mu \ll 1. \quad (9)$$

Очевидно, $u(t)$ является нулевым приближением в разложении по малому параметру $\mu = \mu(l)$. Порядок малости l , как видно из (9), определяется нормой $\|u_x\|_{C_{Q_1}}$. В теореме 1 дана оценка $\|\hat{u}_x\|_{C_Q}$ для задачи (5) — (8). Для получения оценки $\|u_x\|_{C_{Q_0}}$ задачи (1) — (4) в $Q_0 = Q \setminus Q_1$ примем, что: $k \in C'(u_0, u_m)$, $c \in C^2(u_0, u_m)$, $a \in C'(u_0, u_m)$, $a' > 0$, $R_r = 0$, $\pi(t) \equiv P = \text{const}$, $A(u) \equiv \frac{1}{c} \left(\frac{1}{c} \left(\frac{k}{c} \right) \right)' > 0$, $v(t) \equiv u_0$.

Продифференцируем (2) по x и рассмотрим задачу для $w = c(u)u_x$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{k}{c} w_{xx} - a(x, t, w, w_x), \quad \text{где } a = P \left(\alpha^2 - \frac{\alpha'}{c} w \right) \times \\ &\times \exp \left\{ - \int_0^x \alpha(u(\xi, t)) d\xi \right\} - 3 \left(\frac{k}{c} \right)' \frac{w}{c} w_x - A(u) w^3, \end{aligned}$$

причем w удовлетворяет граничным условиям первого рода и

$$\begin{aligned} w_T &\equiv \max_{[0; l_1]} \{w(0, t), w(l, t)\} = \max_{[u_0; u_m]} \left\{ \frac{c(u)}{k(u)} \lambda_0 (u - u_0); \right. \\ &\left. \frac{c(u)}{k(u)} \lambda_1 (u_m - u_0) \right\}. \end{aligned}$$

Если $a(x, t, w, 0) \geq -b_1 w^2 - b_2$, $b_1, b_2 = \text{const} > 0$, то из [8] можно получить оценку $w_1 = \|w\|_{C_{Q_0}}$:

$$w_1 \leq e^{b_1 t_0} \min \{w_r; \sqrt{2b_2 e t_0}\}. \quad (10)$$

В нашем случае найдем, что

$$b_1 = P \sup_{[u_0; u_m]} \frac{\alpha'(u)}{c(u)} > 0, \quad b_2 = \max \{0; w_1^4 \sup_{[u_0; u_m]} A(u); P w_1 \alpha^2(u_m) - \\ - w_1^4 \inf_{[u_0; u_m]} A(u)\} = b_2(w_1) > 0.$$

Поскольку $b_2 = b_2(w_1)$, мы получили оценку в неявном виде. Более грубая, но явная оценка следует из (10): $w_1 \leq e^{b_1 t_0} w_r$, и окончательно:

$$\|u_x\|_{C_{Q_0}} \leq e^{b_1 t_0} w_r \sup_{[u_0; u_m]} \left(\frac{1}{c(u)} \right). \quad (11)$$

Уравнение для $u(t)$ найдем, интегрируя (2) от 0 до l с учетом граничных условий и того, что $u(x, t) \simeq u(t) : c(u) u_t = \pi(t) Q(u) - \lambda_0 \times \times (u - u_0) - \lambda_1 (u - v(t))$, где

$$Q(u) = \frac{1 + R_r \mathcal{E}^2 - (1 + R_r) \mathcal{E}}{1 - R R_r \mathcal{E}^2}, \quad \mathcal{E} = e^{-\alpha(u)l}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гласко В. Б., Губарь А. Ю., Федотова Е. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1986. 27, № 4. С. 21. [2] Гласко В. Б., Ольховская Н. И. // Там же. 1986. 27, № 5. С. 7. [3] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., 1964. [4] Лыков А. В. Тепломассообмен. М., 1978. [5] Новиков М. П. Теория подобия в термодинамике и теплопередаче. М., 1980. [6] Васильева А. Б., Бутузov В. Ф. Асимптотическое разложение сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973. [7] Митропольский Ю. А., Мосеев Б. И. Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных. Киев, 1968. [8] Ладженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. [9] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1963. [10] Михайлов М. П. Теоремы вложения для дифференциальных уравнений с частными производными. М., 1976. [11] Видин Ю. И. Расчет нагрева тонкого тела конвекцией. // Материалы Междунар. школы-семинара «Математические модели, аналитические и численные методы в теории переноса». Минск, 1982. С. 187.

Поступила в редакцию
03.03.87