

УДК 523.854

О СТРУКТУРЕ МОМЕНТОВ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Д. Д. Соколов, Т. С. Шумкина

(кафедра математики)

Найдены скорость экспоненциального роста и собственные функции статистического момента p -го порядка скалярного поля в среде с ненулевой диффузией. Оценено критическое значение коэффициента диффузии, при котором еще возможно самовозбуждение поля.

Введение. Развитие неустойчивостей в случайной среде (например, самовозбуждение магнитного поля в турбулентном течении проводящей жидкости) приводит к возникновению структур на фоне плавного распределения [1]. Эти структуры обуславливают поведение высоких моментов генерируемого случайного поля, которые растут быстрее, чем типичная реализация этого поля. Такое распределение генерируемой величины называется перемежаемым. Типичные черты перемежаемости хорошо передаются уже простым параболическим уравнением типа Шрёдингера со случайным потенциалом

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = U\psi + \kappa \Delta \psi. \quad (1)$$

Здесь $U(t, \mathbf{x}, \omega)$ — случайный потенциал, переменный во времени и пространстве, ω — случайный параметр, κ — коэффициент диффузии. Самовозбуждающую величину ψ , распределение которой в пространстве мы собираемся изучать, можно представить себе, например, как плотность бактерий, размножающихся (или умирающих) со скоростью U и диффундирующих с коэффициентом диффузии κ . Мы будем рассматривать случай короткокоррелированного потенциала U (белый шум). Другими словами,

$$U(t, \mathbf{x}, \omega) = d\mathbf{w}_t^{(\mathbf{x})}/dt,$$

где $\mathbf{w}_t^{(\mathbf{x})}$ — набор винеровских процессов, зависящих от точки. Мы понимаем уравнение (1) с обобщенным потенциалом U в смысле Ито, переход к пониманию Стратоновича не вызывает затруднений (см. [2]).

Наша цель состоит в исследовании скоростей роста и пространственной структуры высоких моментов решения уравнения (1)

$$\mathfrak{M}_p(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p) = \langle \psi(t, \mathbf{x}_1) \psi(t, \mathbf{x}_2) \dots \psi(t, \mathbf{x}_p) \rangle$$

при достаточно малых коэффициентах диффузии κ , при которых и возникает перемежаемость. Здесь угловые скобки означают осреднение по ансамблю реализаций потенциала, т. е. по ω . До сих пор эта задача рассматривалась либо при $\kappa=0$, либо в моделях дискретного пространства (см. [1, 2]).

1. Моментные уравнения. Уравнения для эволюции высоких моментов \mathfrak{M}_p в короткокоррелированной среде легко выводятся методом, описанным в [3]. Они имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{M}_p(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = \kappa (\Delta_1 + \dots + \Delta_p) \mathfrak{M}_p + \left(\sum_{i < j} V(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right) \mathfrak{M}_p. \quad (2)$$

Здесь Δ_i означает лапласиан по переменной x_i , $V(x_i, x_j)$ — корреляционная функция потенциала U , она определяется следующим образом:

$$\langle U(t, x_i) dt, U(t, x_j) dt \rangle = V(x_i, x_j) dt. \quad (3)$$

В левой части (3) дифференциал dt встречается дважды, а в правой лишь один раз, поскольку потенциал U является не обычной, а обобщенной функцией, белым шумом. Отметим, что в уравнении (2) встречаются лишь бинарные корреляции потенциала.

Мы рассмотрим случай статистически однородных и изотропных потенциалов, когда V зависит лишь от $r = |x_i - x_j|$. В этом случае уравнение (2) трансляционно-инвариантно относительно перемещения «центра масс» $R = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i$. Удобно в (2) перейти к новым переменным

$y_i = x_i - R$, которые отсчитываются от «центра масс». Будем вначале искать трансляционно-инвариантные решения уравнения (2), т. е. функции \mathfrak{M}_p , не зависящие от R .

2. **Квазиклассическое приближение***. Явление перемежаемости возникает при малых коэффициентах диффузии κ , поэтому для решения уравнения (2) естественно воспользоваться квазиклассическим приближением. Потенциал $\sum_{i < j} V(x_i, x_j)$ в уравнении (2) достигает

максимального значения в точке $x_1 = x_2 = \dots = x_p$ ($y_i = 0$) и быстро убывает, когда $r = |x_i - x_j|$ превышает значение корреляционного радиуса потенциала U . Естественно предположить, что наиболее быстро растущее решение (2), которое и представляет наибольший интерес, сосредоточено в области малых r . Аппроксимируем функцию $V(r)$ в области малых r параболой

$$V(r) = a - br^2. \quad (4)$$

Здесь a имеет смысл среднего квадрата потенциала U , а величина $r_0 = \sqrt{a/b}$ — корреляционного радиуса. Разумеется, аппроксимация (4) применима лишь при $r \ll r_0$ и лишь в тех случаях, когда функция V не содержит безразмерных параметров, существенно отличающихся от единицы (типа гидродинамического числа Рейнольдса в задаче о самовозбуждении магнитного поля [5]).

Подставляя потенциал (4) в уравнение (2), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{M}_p(t, y_1, \dots, y_p) = \kappa \Delta \mathfrak{M}_p + \left[\frac{p(p-1)}{2} a - bp\rho^2 \right] \mathfrak{M}_p, \quad (5)$$

где Δ означает оператор Лапласа в $3p$ -мерном пространстве векторов y_i (индекс i принимает значения $i=1, 2, \dots, p$, причем эти векторы связаны дополнительным соотношением $\sum_{i=1}^p y_i = 0$), $\rho = \left(\sum_{i=1}^p y_i^2 \right)^{1/2}$ — расстояние от начала координат в $3p$ -мерном пространстве.

Будем искать решения уравнения (5), растущие с сохранением формы, т. е. собственные функции задачи

$$\left[\gamma - \frac{p(p-1)}{2} a \right] \mathfrak{M}_p = \kappa \Delta \mathfrak{M}_p - bp\rho^2 \mathfrak{M}_p, \quad (6)$$

* Мы понимаем квазиклассическое приближение в современном широком смысле [4], включая в него и так называемое осцилляторное приближение.

где γ — скорость роста, $\mathfrak{M}_p(t, y_1, \dots, y_p) = \mathfrak{M}_p(y_1, \dots, y_p) e^{t}$. Уравнение (6) является уравнением гармонического осциллятора в $3p$ -мерном пространстве. Его старшее собственное значение

$$\gamma_0^{(p)} = \frac{p(p-1)}{2} a - 3p \sqrt{\kappa b p}, \quad (7)$$

а соответствующая собственная функция имеет вид

$$\mathfrak{M}_p^{(0)}(y_1, \dots, y_p) = \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{2} \left(\frac{bp}{\kappa} \right)^{1/4} \right\}. \quad (8)$$

Это справедливо до $\rho \sim r_0 \sqrt{p}$, далее \mathfrak{M}_p убывает экспоненциально, однако скорость убывания зависит от строения функции V .

Из (7) видно, что перемежаемость сохраняется при достаточно малых κ . Сопоставляя скорости роста моментов различного порядка, надо сравнивать величины γ_p/p . Видно, что они увеличиваются с увеличением p при малых κ . Из (7) можно найти также оценку значения $\kappa_{кр}^{(p)}$, такого, что при $\kappa < \kappa_{кр}^{(p)}$ происходит самовозбуждение p -го момента \mathfrak{M}_p (при $\kappa = \kappa_{кр}^{(p)}$ скорость роста $\gamma^{(p)}(\kappa)$ обращается в нуль). Приравняв $\gamma_0^{(p)}$ в (7) к нулю, получим

$$\kappa_{кр}^{(p)} = \frac{(p-1)^2 a^2}{36bp} \approx \frac{a^2}{36b} \quad (p \gg 1).$$

Скорость роста как функция κ непрерывна в точке $\kappa=0$, однако, в отличие от дискретного случая [1] ($\gamma^{(p)} - \gamma^{(p)}(0) = O(\kappa)$), она зависит от κ в точке $\kappa=0$ неаналитически, как $\gamma^{(p)} - \gamma^{(p)}(0) = O(\sqrt{\kappa})$. В этом смысле рассматриваемая нами задача больше похожа на векторную задачу теории турбулентного динамо, где для случая второго момента также известна неаналитическая зависимость $\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}(0) = O\left(\frac{1}{\ln^2 \kappa}\right)$ [6].

Отметим, что в задаче динамо коэффициент диффузии зависит от взаимного расстояния ($\kappa = \kappa(r)$), с чем и связан логарифмический характер асимптотики.

Собственная функция (8) обладает наибольшей возможной симметрией — группой вращения в $3(p-1)$ -мерном пространстве, тогда как *a priori* можно было бы ожидать симметрии группы вращений в каждом из трехмерных пространств: $O(3) \times O(3) \times \dots \times O(3)$. Это свойство повышения симметрии до максимальной иногда встречается и в других физических задачах, например в космологии [7].

Нетрудно вычислить и квазиклассическую асимптотику следующих собственных значений и собственных функций уравнения (2):

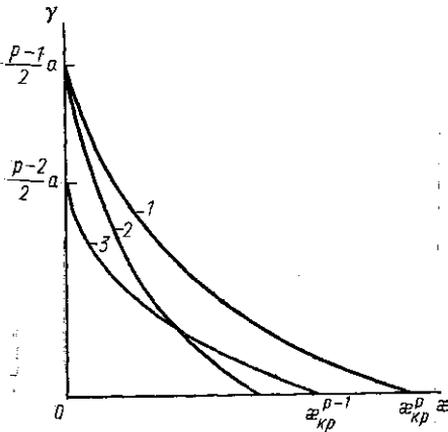
$$\gamma_N^{(p)} = \frac{p(p-1)}{2} a - 2 \sqrt{\kappa p b} \left(N + \frac{3}{2} p \right),$$

а собственные функции получаются из (8) домножением на комбинации из полиномов Эрмита, сумма индексов которых равна N . О статистическом смысле собственных функций с $N > 0$ см. [8].

Вид функций $\frac{1}{p} \gamma^{(p)}(\kappa)$ показан на рисунке. Заметим, что графики функций $\frac{1}{p+1} \gamma_N^{(p+1)}(\kappa)$ и $\frac{1}{p} \gamma_0^{(p)}(\kappa)$ при $N > 0$ могут пересекаться (графики функций $\frac{1}{p} \gamma^{(p)}$ и $\frac{1}{q} \gamma^{(q)}$ не пересекаются при $p \neq q$).

По-видимому, после точки такого пересечения квазиклассическое приближение неприменимо для $\gamma_N^{(p)}$.

Эволюция произвольного пространственно однородного распределения p -го момента описывается с помощью разложения по найденным собственным функциям. На больших временах решение выходит на старшую собственную функцию.



3. Распространение пространственно неоднородного момента. Вернемся теперь к общей задаче об эволюции пространственно неоднородного распределения p -го момента. Будем считать, что это распределение сосредоточено, например, в некоторой области. Предположим, что \mathfrak{M}_p медленнее изменяется по переменной R , чем по y_i . Во всяком слу-

Зависимость величины $(1/p)\gamma_N^p$ от коэффициента диффузии κ при $N=0$ (1) и при $N>0$ (2). Графики функции $(1/p)\gamma_N^p$ при $N>0$ и $[1/(p-1)]\gamma_0^{p-1}$ (3) могут пересекаться

чае это заведомо выполнено на больших временах, когда из-за расплывания характерный размер неоднородностей становится больше корреляционной длины генерируемого скалярного поля. Тогда решение (2) естественно искать в виде

$$\mathfrak{M}_p(t, x_1, \dots, x_p) = M(R, t) \mathfrak{M}_p(y_1, \dots, y_p),$$

где $\mathfrak{M}_p(y_1, \dots, y_p)$ — собственная функция пространственно однородной задачи. Тогда для функции M методом, развитым в [9], получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} M(R, t) = \gamma M + p\kappa \Delta_R M, \quad (9)$$

где Δ_R означает лапласиан по переменной R . Решения (9) распространяются в пространстве со скоростью [10, 5]

$$v = 2\sqrt{p\gamma\kappa}. \quad (10)$$

В качестве скорости роста γ нужно взять, конечно, $\gamma_0^{(p)}$. Решения, соответствующие $N>0$, медленнее растут во времени и, согласно (10), медленнее распространяются в пространстве.

Уравнение (2) в ограниченном теле исследуется аналогично [9].

4. Разновременные корреляции и спектр. Нетрудно вычислить и разновременные корреляции

$$\mathfrak{M}_p(t_1, \dots, t_p, x_1, \dots, x_p) = \langle \psi(t_1, x_1) \dots \psi(t_p, x_p) \rangle$$

в простейшем случае $t_1 > t_2 = t_3 = \dots = t_p$ (см. [3]):

$$\mathfrak{M}_p(t_1, t_2, \dots, t_p, x_1, \dots, x_p) = \int dz \mathfrak{M}_p(t_2, z, x_2, \dots, x_p) \cdot g(t_1 - t_2, x_1, z),$$

где g — функция Грина уравнения для первого момента, т. е. просто функция Грина уравнения теплопроводности. В более сложных случаях, как указал нам Р. Л. Стратонович, необходимо использовать

функции Грина уравнений для высших моментов, построение которых выходит за рамки данной работы. Так, при $t_2 > t_1$

$$\mathfrak{M}_3(t_1, t_2, t_2, x_1, x_2, x_3) = \int dz_2 dz_3 \mathfrak{M}_3(t_1, x_1, z_2, z_3) \cdot g_2(t_2 - t_1, x_2, x_3, z_2, z_3),$$

где $g_2(t_2 - t_1, x_2, x_3, z_2, z_3)$ — функция Грина, определяемая решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{M}_2(t, x_2, x_3) = \kappa (\Delta_2 + \Delta_3) \mathfrak{M}_2 + V(x_2, x_3) \mathfrak{M}_2.$$

При произвольных t_1, t_2, t_3 , связанных неравенством $t_1 \leq t_2 \leq t_3$, будем иметь

$$\mathfrak{M}_3(t_1, t_2, t_3, x_1, x_2, x_3) = \int dz_2 dz_3 dz'_3 \mathfrak{M}_3(t_1, x_1, z_2, z_3) g_2(t_2 - t_1, x_2, z'_3, z_2, z_3) g(t_3 - t_2, x_3, z'_3).$$

Отсюда ясен способ построения моментов произвольной кратности.

Представляет интерес и спектр, т. е. фурье-образ собственных функций (8). Он равен

$$\mathfrak{M}_p(k_1, \dots, k_p) = \left(\frac{bp}{\kappa}\right)^{\frac{3}{8}p} \exp\left\{-\frac{k^2}{4} \left(\frac{\kappa}{bp}\right)^{1/4}\right\} \delta(k_1 + \dots + k_p).$$

Здесь $k^2 = \sum_{i=1}^p k_i^2$. Эта формула применима, очевидно, при $k > 1/(r_0 \sqrt{p})$.

5. Обсуждение. Реальные потенциалы всегда отличаются от обобщенного короткокоррелированного потенциала. В частности, может существовать предельное значение U_{\max} такое, что с вероятностью единица $|U| < U_{\max}$. В этом случае ни один из моментов не может расти быстрее, чем pU_{\max} . Поэтому возникает предельное значение показателя

$$p_{\max} = 2U_{\max}/a - 1,$$

до которого применимы полученные формулы.

Отметим, что полученные собственные функции моментных уравнений не содержат каких-либо нетривиальных масштабов. Это означает, по-видимому, что каждый член иерархии пиков перемежаемости устроен очень просто — пики имеют характер пятен высокой интенсивности, а высшие собственные функции соответствуют хребтам между пиками. Этим рассмотренное нами простейшее уравнение (1) отличается от более сложных примеров перемежаемости, в которых отдельные моментные уравнения обнаруживают сложную, многомасштабную структуру [8].

Решение ψ уравнения (1) можно представить в виде [1]

$$\psi = \exp\{\gamma(\kappa)t + \xi\sqrt{t}\},$$

где $\gamma(\kappa)$ — (отрицательная) скорость роста типичной реализации, ξ — случайная величина. При $\kappa \rightarrow 0$ скорость роста $\gamma(\kappa) \rightarrow -1/2$, а ξ сходятся к некоррелированным в разных точках гауссовским величинам. При ненулевой диффузии случайные величины ξ существенно негаус-

совские. Действительно, для гауссовских ξ скорости роста $\gamma_0^{(p)}$ должны были бы иметь вид

$$\gamma_0^{(p)} = \gamma(x) + (p^2/2)f(x),$$

где $f(x)$ — дисперсия ξ .

Выяснение асимптотического строения распределения случайных величин $\xi(x)$ при малых x должно составить следующий этап изучения уравнения (1).

Авторы благодарны А. А. Рузмайкину за полезные обсуждения и проф. Р. Л. Стратоновичу за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. // УФН. 1987. 152, № 1. С. 3. [2] Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. // ЖЭТФ. 1985. 89, № 6. С. 2061. [3] Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. // Магнитная гидродинамика. 1983. № 4. С. 67. [4] Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М., 1976. [5] Новиков В. Г., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. // ЖЭТФ. 1983. 85, № 3. С. 909. [6] Артамонова О. В., Соколов Д. Д. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1986. 27, № 3. С. 8. [7] Гришук Л. П., Зельдович Я. Б. // Зельдович Я. Б. Избранные труды. Частицы, ядра. Вселенная. М., 1985. С. 179. [8] Kleegorin N. I., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D. // Plasma astrophysic. ESA. Paris, 1986. SP-251. P. 557. [9] Маслова Т. Б., Шумкина Т. С., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. // ДАН СССР. 1987. 294, № 6. С. 13. [10] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. // Теория горения и взрыва. М., 1981. С. 213.

Поступила в редакцию
11.03.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 4

УДК 530.12:531.51; 539.12.17

СОСТАВНОЕ КРУЧЕНИЕ И СПОНТАННАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ ТЕОРИЙ ТИПА КАЛУЦЫ—КЛЕЙНА

Ю. С. Владимиров, А. Д. Попов

(кафедра теоретической физики)

Использование составного кручения позволяет получить спонтанную компактификацию теорий типа Калуцы—Клейна на пространство Минковского. Обсуждено получение бозонной части лагранжиана суперструн из скалярной кривизны многомерной теории типа Эйнштейна—Картана с составным кручением.

1. В последнее десятилетие интенсивно развивались расширенные теории супергравитации [1], а после работ [2] резко возросла активность в теории суперструн [3]. Еще в 70-е годы было замечено, что расширенные суперсимметричные теории Янга—Миллса и $N \geq 2$ теории супергравитации удобнее получать с помощью размерной редукции $N=1$ суперсимметричных теорий, формулируемых в пространствах размерности $d > 4$ [4]. Если к этому добавить, что для непротиворечивой формулировки теории бозонных или фермионных струн без духов и тахионов необходимо формулировать их в размерности $d=26$ или $d=10$ [3], то становится ясным, что идея Калуцы и Клейна [5] об объединении взаимодействий за счет увеличения размерности пространства-времени входит в фундамент всех основных теорий, претендующих на объединение взаимодействий — теорий супер-Янга—Миллса, супергравитации и теорий суперструн.