

совские. Действительно, для гауссовских ξ скорости роста $\gamma_0^{(p)}$ должны были бы иметь вид

$$\gamma_0^{(p)} = \gamma(\kappa) + (p^2/2)f(\kappa),$$

где $f(\kappa)$ — дисперсия ξ .

Выяснение асимптотического строения распределения случайных величин $\xi(\kappa)$ при малых κ должно составить следующий этап изучения уравнения (1).

Авторы благодарны А. А. Рузмайкину за полезные обсуждения и проф. Р. Л. Стратоновичу за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рузмакин А. А., Соколов Д. Д. // УФН. 1987. 152, № 1. С. 3. [2] Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рузмакин А. А., Соколов Д. Д. // ЖЭТФ. 1985. 89, № 6. С. 2061. [3] Молчанов С. А., Рузмакин А. А., Соколов Д. Д. // Магнитная гидродинамика. 1983. № 4. С. 67. [4] Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М., 1976. [5] Новиков В. Г., Рузмакин А. А., Соколов Д. Д. // ЖЭТФ. 1983. 85, № 3. С. 909. [6] Артамонова О. В., Соколов Д. Д. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1986. 27, № 3. С. 8. [7] Гришук Л. П., Зельдович Я. Б. // Зельдович Я. Б. Избранные труды. Частицы, ядра. Вселенная. М., 1985. С. 179. [8] Kleegorin N. I., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D. // Plasma astrophysic. ESA. Paris, 1986. SP-251. P. 557. [9] Маслова Т. Б., Шумкина Т. С., Рузмакин А. А., Соколов Д. Д. // ДАН СССР. 1987. 294, № 6. С. 13. [10] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. // Теория горения и взрыва. М., 1981. С. 213.

Поступила в редакцию
11.03.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 4

УДК 530.12:531.51; 539.12.17

СОСТАВНОЕ КРУЧЕНИЕ И СПОНТАННАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ ТЕОРИЙ ТИПА КАЛУЦЫ—КЛЕЙНА

Ю. С. Владимиров, А. Д. Попов

(кафедра теоретической физики)

Использование составного кручения позволяет получить спонтанную компактификацию теорий типа Калуцы—Клейна на пространство Минковского. Обсуждено получение бозонной части лагранжиана суперструн из скалярной кривизны многомерной теории типа Эйнштейна—Картана с составным кручением.

1. В последнее десятилетие интенсивно развивались расширенные теории супергравитации [1], а после работ [2] резко возросла активность в теории суперструн [3]. Еще в 70-е годы было замечено, что расширенные суперсимметричные теории Янга—Миллса и $N \geq 2$ теории супергравитации удобнее получать с помощью размерной редукции $N=1$ суперсимметричных теорий, формулируемых в пространствах размерности $d > 4$ [4]. Если к этому добавить, что для непротиворечивой формулировки теории бозонных или фермионных струн без духов и тахионов необходимо формулировать их в размерности $d=26$ или $d=10$ [3], то становится ясным, что идея Калуцы и Клейна [5] об объединении взаимодействий за счет увеличения размерности пространства-времени входит в фундамент всех основных теорий, претендующих на объединение взаимодействий — теорий супер-Янга—Миллса, супергравитации и теорий суперструн.

В большинстве работ многомерное пространство V^{4+n} представляется в виде прямого произведения $V^4 \times B^n$ 4-мерного пространства-времени V^4 и компактного «внутреннего» пространства B^n , вследствие чего метрика в V^{4+n} приобретает характерный блочный вид анзаца Калуцы—Клейна. Размеры внутреннего пространства предполагаются очень малыми — порядка планковской длины $l_0 \sim 10^{-33}$ см, что делает пространство B^n ненаблюдаемым. Ненаблюдаемость дополнительных измерений позволяет разложить метрику и поля материи по собственным функциям дифференциальных операторов во внутреннем пространстве и проинтегрировать по дополнительным координатам (т. е. произвести усреднение), получая эффективный 4-мерный лагранжиан [6]. Обычно $(4+n)$ -мерное пространство $V^4 \times B^n$ и соответствующий ему анзац для метрики и материальных полей принимается за вакуумное состояние, а процедура размерной редукции трактуется как разложение полей около вакуумного значения и усреднение по дополнительным степеням свободы.

Ряд авторов (см., напр., [7]) считают, что основное состояние должно быть решением некоторых исходных уравнений поля, т. е. проблема вакуума является, по существу, динамической проблемой. Исходя из этого, формулируется такая программа построения теории, в которой пространственно-временные координаты x^μ и координаты пространства дополнительных измерений y^m должны входить в лагранжиан и уравнения поля симметрично. Расщепление координат x^M пространства V^{4+n} на координаты x^μ пространства-времени V^4 и ненаблюдаемые внутренние координаты y^m пространства B^n должно при этом происходить спонтанно, как следствие решений уравнений поля. Получение решений уравнений многомерных теорий, описывающих расщепление $V^{4+n} \rightarrow V^4 \times B^n$, в этом подходе составляет ключевую задачу — проблему спонтанной компактификации [8].

В качестве уравнений поля многомерных теорий типа Калуцы—Клейна берется связанная система уравнений типа Эйнштейна и полей материи в $d=4+n$ измерениях. Заметим, что введение дополнительных калибровочных или иных полей в пространство $4+n$ измерений противоречит основной идее теорий Калуцы—Клейна геометризации всех (бозонных) полей. Однако это вынужденное отступление обусловлено тем обстоятельством, что уравнения типа Эйнштейна в вакууме допускают в качестве решений только риччи-плоские внутренние многообразия, не обладающие достаточным числом симметрий, нужных для получения соответствующего феноменологии числа калибровочных полей. Введение космологической постоянной или полей материи в теорию $4+n$ измерений позволяет получить однородное внутреннее пространство с достаточно широкой группой изометрий, но приводит к индуцированию в V^4 космологической постоянной огромной величины: $\Lambda \sim \sim l_0^{-2} \sim 10^{66} \text{ см}^{-2}$ (положительной или отрицательной). К равной нулю индуцированной космологической постоянной в V^4 можно прийти при одновременном использовании и полей материи, и космологической постоянной в V^{4+n} . Отметим, что проблему космологической постоянной в V^4 можно также решить при использовании некомпактных внутренних пространств конечного объема [9] или дополнительных временно-подобных измерений [10]. Заметим также, что поля материи можно получить из требования суперсимметрии многомерной теории. Так, в $d=11$ супергравитации это приводит к появлению в бозонном секторе антисимметричного четырехиндексного тензора F_{MNPQ} , а в бозонном секторе $d=10$ супергравитации — к появлению трехиндексного антисимметричного тензорного поля F_{MNP} .

Данная работа продолжает линию исследований теории Калуцы—Клейна, изложенную в [11]. Здесь показана возможность спонтанно компактификации расширенной многомерной теории типа Эйнштейна—Картана с составным кручением. Рассмотрение основывается на идее одного из авторов [12] о представлении 3-формы $S = S_{MNP} dx^M \wedge dx^N \wedge dx^P$, ассоциированной с полностью антисимметричным тензором кручения S_{MNP} , как внешнего дифференциала от некоторой 2-формы $\Phi = \Phi_{MN} dx^M \wedge dx^N$, коэффициенты Φ_{MN} которой принимаются за истинные динамические поля.

2. Рассмотрим $(4+n)$ -мерную теорию типа Эйнштейна—Картана с антисимметричным по всем индексам тензором кручения S_{MNP} и космологической постоянной Λ . В качестве лагранжиана выбираем

$$\mathcal{L} = -\frac{\bar{R}}{16\pi} + \frac{\Lambda}{8\pi} = -\frac{R}{16\pi} + \frac{1}{64\pi} S_{MNP} S^{MNP} + \frac{\Lambda}{8\pi}, \quad (1)$$

где $\bar{R}$ — обобщенная скалярная кривизна многообразия с кручением, R — скалярная кривизна риманова многообразия. Кручение S_{MNP} в (1) не имеет динамической части и при варьировании (1) по кручению получим $S_{MNP} = 0$.

Для обхода этой трудности обычно используют два пути. На первом из них к лагранжиану (1) добавляют различные комбинации квадратов обобщенных тензоров Римана—Кристоффеля, Риччи и скалярной кривизны, получая при этом для кручения динамическую часть [13]. На втором пути, предложенном одним из авторов [12], полностью антисимметричный тензор кручения предлагается считать составным полем, выражающимся через потенциалы $\Phi_{MN} = -\Phi_{NM}$:

$$S_{MNP} = 8\sqrt{\pi/6} F_{MNP} = 4\sqrt{\pi/6} (\Phi_{MN,P} + \Phi_{NP,M} + \Phi_{PM,N}). \quad (2)$$

Коэффициент пропорциональности между S_{MNP} и F_{MNP} выбран из условия совпадения лагранжиана антисимметричного трехиндексного абелева поля F_{MNP} со стандартным. В последнее время этот подход был использован в разных задачах. Так, в $d=11$ супергравитации кручение во внутреннем пространстве было связано дуальным преобразованием с внутренними компонентами антисимметричного тензора 4-го ранга [1], т. е. представлено как составное поле. Член типа Весса—Зумино—Виттена [14] двумерных нелинейных σ -моделей оказался связанным с кручением в фазовом пространстве полей [15], представляемым через потенциалы Φ_{MN} по формуле (2). При этом введение составного кручения в моделях главных киральных полей позволило не только получить член Весса—Зумино—Виттена [15], но и доказать конечность моделей во всех порядках для параллелизующего кручения [16]. Заметим также, что составное кручение было использовано одним из авторов для описания модели Вайнберга—Салама в рамках теории типа Калуцы—Клейна [17].

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\mathcal{L} = -\frac{R}{16\pi} + \frac{1}{6} F_{MNP} F^{MNP} + \frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (3)$$

Варьируя (3) по метрике g_{MN} и полю Φ_{MN} , приходим к уравнениям

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = 8\pi \left(F_{MPQ} F_N{}^{PQ} - \frac{1}{6} g_{MN} F_{PQL} F^{PQL} \right) - \Lambda g_{MN}, \quad (4)$$

$$F^{MNP}{}_{;M} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_M (\sqrt{|g|} F^{MNP}) = 0. \quad (5)$$

3. Для координат x^M пространства V^{4+n} положим $x^M = \{x^\mu, y^m\}$, где $M, N, \dots = 1, 2, 3, 4, \dots, 4+n$; $\mu, \nu, \dots = 1, 2, 3, 4$; $m, n, \dots = 1, \dots, n$. Буквы из начала латинского и греческого алфавитов будем использовать для неголономных индексов касательных пространств, а из середины и конца — для координатных индексов. Будем искать решение уравнений типа Эйнштейна (4), соответствующее топологии $V^{4+n} = V^4 \times G$, где G — n -мерная полупростая группа Ли.

Положим

$$F^{mnp} = \frac{\lambda}{\sqrt{|g|}} g_a^m g_b^n g_c^p \varepsilon^{abc}, \quad (6)$$

считая все остальные компоненты тензора F^{MNP} равными нулю. Здесь g_a^m — компоненты репера во внутреннем пространстве, ε_{abc} — структурные константы группы G , λ — некоторая постоянная. Тензор F^{mnp} вида (6) является ковариантно постоянным, поэтому уравнения (5) удовлетворяются тождественно. Подстановка анзаца (6) в уравнения (4) приводит их к виду

$$R_{\mu\nu} = \frac{2}{d-2} \left(\Lambda - \frac{8\pi\lambda^2 n}{3} \right) g_{\mu\nu}, \quad (7)$$

$$R_{mn} = 8\pi\lambda^2 g_{mn} + \frac{2}{d-2} \left(\Lambda - \frac{8\pi\lambda^2 n}{3} \right) g_{mn}. \quad (8)$$

Полагая

$$\Lambda = 8\pi\lambda^2 n/3, \quad (9)$$

получим риччи-плоское четырехмерное пространство-время, в качестве которого можно выбрать пространство Минковского M^4 . При выполнении (9) уравнения (8) совпадают с уравнениями Эйнштейна на групповом многообразии G , являющемся компактным пространством Эйнштейна положительной кривизны. Таким образом, мы получили спонтанную компактификацию пространства V^{4+n} в пространство $M^4 \times G$ с нулевой космологической постоянной в пространстве-времени M^4 .

4. Следует отметить, что поле F_{MNP} , использованное выше для спонтанной компактификации, входит также в бозонную часть действия $d=10$ теории супергравитации, содержащую кроме него еще скалярное поле φ [8]. Однако, как указано в работе [18], вклад от скалярного поля φ можно учесть, полагая, что в связность $\tilde{\Gamma}_{MNP}$ кроме составного кручения $2ae^{-m\varphi}F_{MNP}$ входит еще слагаемое вида (неметрический перенос [13]) $B_{MNP} = bg_{MN}\partial_P\varphi$, т. е.

$$\tilde{\Gamma}_{MNP} = \Gamma_{MNP} + 2ae^{-m\varphi}F_{MNP} + b(g_{MN}\partial_P\varphi + g_{MP}\partial_N\varphi - g_{NP}\partial_M\varphi), \quad (10)$$

где Γ_{MNP} — символы Кристоффеля, $a^2 = 8\pi/3$, $m^2 = 32\pi/(d-2)$, $b^2 = 32\pi/[(d-1)(d-2)]$. Таким образом, бозонную часть лагранжиана $N=1$, $d=10$ супергравитации

$$\mathcal{L} = -\frac{R}{16\pi} + \frac{e^{-2m\varphi}}{6} F_{MNP}F^{MNP} + \frac{1}{2} g^{MN}\partial_M\varphi \cdot \partial_N\varphi + \Lambda \quad (11)$$

можно получить из теории типа Эйнштейна—Картана со связностью вида (10). Заметим, что условие $N=1$ суперсимметрии приводит в $d=10$ супергравитации к требованию $\Lambda=0$.

В работе [19] лагранжиан (11) рассматривался в качестве эффективного лагранжиана для бозонной струны при $d=506$ и $\Lambda = (d-26)!$

$/3\alpha'$, где α' — коэффициент наклона траектории Редже [8]. Было показано, что выбор внутреннего пространства в виде группового многообразия $G = E_8 \times E_8$ или SO (32) и отождествление части компонент F^q_{mn} тензора F^q_{MN} с кручением на групповом многообразии G , а компонент $F^a_{\mu\nu}$ с калибровочными полями группы G позволяет получить бозонную часть действия Чаплина—Мантона [20] $N=1$, $d=10$ супергравитации, взаимодействующей с полями Янга—Миллса группы G . Известно, что действие Чаплина—Мантона с точностью до гравитационных слагаемых Черна—Саймонса совпадает с действием Грина—Шварца [2] для $d=10$ суперструны. Дафф и др. [19] показали также, что предложенный ими анзац является самосогласованным, т. е. уравнения $d=10$ супергравитации, взаимодействующей с калибровочными полями группы G , вкладываются в систему уравнений типа Эйнштейна, полей F_{MNP} и ϕ , следующих из лагранжиана (11) в $d=506$. Таким образом, использование составного кручения оказывается полезным не только в σ -моделях [15, 16] или в спонтанной компактификации теорий типа Калуцы—Клейна (что было показано нами выше), но и в теориях супергравитации и суперструн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nieuwenhuizen P. van//Phys. Rep. 1981. 68, N 4. P. 189; Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. N.//Phys. Rep. 1986. 130, N 1—2. P. 1. [2] Green M. B., Schwarz J. H.//Phys. Lett. 1984. 149B, N 1—3. P. 117; Gross D. J. et al.//Ibid. 1985. 54, N 6. P. 502. [3] Schwarz J. H.//Phys. Rep. 1982. 89, N 2. P. 223. [4] Brink L., Schwarz J. H., Scherk J.//Nucl. Phys. 1977. B121, N 1. P. 77; Cremmer E., Julia B., Scherk J.//Phys. Lett. 1978. 76B, N 4. P. 409. [5] Kaluza T.//Sitzber. Preuss. Acad. Wiss., math.-phys. 1921. 1. P. 966; Klein O.//Z. Phys. 1926. 37, N 3. P. 895. [6] Salam A., Strathdee J.//Ann. Phys. 1982. 141, N 2. P. 316. [7] Candelas P. et al.//Nucl. Phys. 1985. B258, P. 46. [8] Арефьева И. Я., Волович И. В.//УФН. 1985. 146, № 4. С. 655. [9] Gell-Mann M., Zwiebach B.//Phys. Lett. 1984. 147B, N 1—3. P. 111; Nicolai H., Wetterich C.//Ibid. 1985. 150B, N 5. P. 347. [10] Арефьева И. Я., Волович И. В.//Письма в ЖЭТФ. 1985. 41, № 12. С. 535. [11] Владимиров Ю. С. Системы отсчета в теории гравитации. М., 1982. [12] Владимиров Ю. С.//Изв. вузов. Физика. 1963. № 2. С. 133. [13] Иваненко Д. Д., Пронин П. И., Сарданашвили Г. А. Калибровочная теория гравитации. М., 1985; Иваненко Д. Д., Сарданашвили Г. А. Гравитация. Киев, 1985. [14] Witten E.//Comm. Math. Phys. 1984. 92. P. 455. [15] Curtright T. L., Zachos C. K.//Phys. Rev. Lett. 1984. 53, N 19. P. 1799. [16] Mukhi S.//Phys. Lett. 1985. 162B, N 4—6. P. 345. [17] Владимиров Ю. С. Препринт физ. фак. МГУ № 16/1985. М., 1985. [18] Nepomechie R. I.//Phys. Rev. 1985. D32, N 12. P. 3201. [19] Duff M. J., Nilsson B. E. W., Pope C. N.//Phys. Lett. 1985. 163B, N 5—6. P. 343. [20] Chaplin G. F., Manton N. S.//Phys. Lett. 1983. 120B, N 1—3. P. 105.

Поступила в редакцию
12.03.87