

УДК 530.12:530.145+539.12

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ИЗОСПИНОМ В ПОЛЕ РЕГУЛЯРНЫХ МОНОПОЛЕЙ И ДАЙОНОВ

Д. В. Гальцов, А. А. Ершов

(кафедра теоретической физики)

Рассчитан спектр связанных состояний скалярных частиц с произвольным изоспином в поле регулярного дайона калибровочной группы $SU(2)$. Указаны неточности более ранних работ, где рассматривались частные значения изоспина.

В последнее время в литературе обсуждается вопрос о связанных состояниях скалярных частиц в поле регулярных магнитных монополей и дайонов [1—4]. В случаях постоянного во всем пространстве поля Хиггса или равного нулю электрического заряда эта задача решена в [1, 2], причем спектр связанных состояний имеет кулоновский характер. Последующие работы были посвящены учету влияния на связанные состояния поля Хиггса регулярного дайона, что приводит к появлению в спектре членов, не имеющих кулоновского характера. Для частиц с изоспином $1/2$ эта задача решалась в [3], а для изоспина $1/2$ и 1 — в работе [4]. Однако полученные в этих работах выражения для энергии имеют отдельные неточности. В настоящей работе эта задача решена для случая произвольного целого или полуцелого изоспина скалярных частиц в поле регулярного дайона и указаны ошибки более ранних работ, где рассматривались частные значения изоспина.

Рассмотрим уравнение Клейна—Гордона во внешних полях Янга—Миллса—Хиггса:

$$\{(\partial^\nu - ieW_\nu^a T^a)(\partial_\nu - ieW_\nu^a T^a) + eG\Phi^a T^a + he^2\Phi^a\Phi^a + \mu^2\}\Phi = 0, \quad (1)$$

где Φ — мультиплет скалярных полей; W_μ и Φ — поля Янга—Миллса и Хиггса, в качестве калибровочной группы будем рассматривать группу $SU(2)$; T^a — генераторы группы: $[T^a, T^b] = i\epsilon_{abc}T^c$; e , G и h — константы связи. Выберем представление группы $SU(2)$, в котором матрица T_3 диагональна, а вместо генераторов T_1 и T_2 введем их линейные комбинации $T_\pm = T_1 \pm iT_2$. Тогда генераторы представления с полным изоспином I будут иметь следующий явный вид:

$$T_\pm = \begin{bmatrix} 0 & B_I & 0 \\ 0 & 0 & B_{I-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ & & & & 0 & B_I \\ & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_- = T_+^T, \quad (2)$$

$$T_3 = \text{diag}\{I, I-1, \dots, -I\},$$

где $B_s^2 = (I+s)(I-s+1)$.

Для калибровочных полей воспользуемся общим сферически-симметричным анзацем Виттена [5]:

$$W_i^a = \epsilon_{aij} n_j \frac{1-K_1}{er} + (\delta_{ai} - n_a n_i) \frac{K_2}{er} + n_a n_i \frac{W_1}{er}, \quad W_t^a = n^a \frac{W_0}{er},$$

$$\Phi^a = n^a \frac{H}{er}, \quad (3)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^{-1}$; W_0, W_1, K_1, K_2, H — функции от r .

Переходя в (3) к сферическим координатам и совершая калибровочное преобразование

$$\tilde{W} = U \left(W + \frac{i}{e} \partial \right) U^{-1}, \quad (4)$$

$$\tilde{\Phi} = U \Phi U^{-1}$$

с унитарной матрицей

$$U = \exp \{-i\varphi T_3\} \exp \{i\theta T_2\} \exp \{i\varphi T_3\}, \quad (5)$$

можно преобразовать поля (3) так, чтобы поле Хиггса $\tilde{\Phi}$ было направлено вдоль третьей оси в изотопическом пространстве:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_t &= \frac{W_0}{er} T_3, \quad \tilde{W}_r = \frac{W_1}{er} T_3, \quad \tilde{\Phi} = \frac{H}{er} T_3, \\ \tilde{W}_\theta &= \frac{1}{2ie} (K_+ e^{-i\varphi} T_+ - K_- e^{i\varphi} T_-), \\ \tilde{W}_\varphi &= -\frac{1 - \cos \theta}{e} T_3 - \frac{\sin \theta}{2e} (K_+ e^{-i\varphi} T_+ + K_- e^{i\varphi} T_-), \end{aligned} \quad (6)$$

где $K_\pm = K_1 \pm iK_2$.

Поля (6) обладают особенностью типа дираковской струны, что является следствием сингулярности калибровочного преобразования (4) с оператором (5).

Подставляя поля (6) в уравнение (1) и используя явный вид генераторов (2), находим, что (1) допускает разделение переменных в виде

$$\Phi_s = \sum_{l,m} \int d\omega \exp \{-i\omega t - is\varphi\} Y_{-s}^m(\theta, \varphi) R_s(r). \quad (7)$$

Здесь $-I \leq s \leq I$ — проекция изоспина; $Y_s^m(\theta, \varphi)$ — спинные сферические гармоники веса s ; $l = |s|, |s|+1, \dots; -l \leq m \leq l$.

Для радиальных частей получаем систему $2I+1$ зацепляющихся уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} (\square_I - A_I^2 K_+ K_-) R_I - B_I \lambda_I^- K_+ R_{I-1} &= 0, & l \geq I, \\ (\square_{I-1} - A_{I-1}^2 K_+ K_-) R_{I-1} - B_{I-1} \lambda_{I-1}^- K_+ R_{I-2} - B_I \lambda_{I-1}^+ K_- R_I &= 0, & l \geq |I-1|, \\ (\square_{I-2} - A_{I-2}^2 K_+ K_-) R_{I-2} - B_{I-2} \lambda_{I-2}^- K_+ R_{I-3} - B_{I-1} \lambda_{I-2}^+ K_- R_{I-1} &= 0, & l \geq |I-2|, \\ \dots & & (8) \\ (\square_{-I+1} - A_{-I+1}^2 K_+ K_-) R_{-I+1} - B_I \lambda_{-I+1}^- K_+ R_{-I} - B_{I-1} \lambda_{-I+1}^+ K_- R_{-I+2} &= 0, & l \geq |I-1|, \\ (\square_{-I} - A_{-I}^2 K_+ K_-) R_{-I} - B_I \lambda_{-I}^+ K_- R_{-I+1} &= 0, & l \geq I, \end{aligned}$$

где $\square_s = (r^2/2) (\mathcal{D}_1^+ \mathcal{D}_0^- + \mathcal{D}_1^- \mathcal{D}_0^+) - sGrH - \hbar H^2 - \mu^2 - \lambda_s^2$, $\mathcal{D}_n^\pm = \partial_r \pm i\omega - i \times \times (s/r) (W_1 \mp W_0) + 2(n/r)$,

$$\lambda_s^2 = l(l+1) - s^2, \quad \lambda_s^\pm = \sqrt{l(l+1) - s(s \pm 1)}, \quad A_s^2 = I(I+1) - s^2.$$

Введением вместо $K_{\pm}$ функций $f(r)$ и $\alpha(r)$ таких, что $K_{\pm} = f \exp \{\pm i\alpha\}$ (при этом $W_1 = r\partial_r \alpha$), можно устранить в уравнениях (8) зависимость от α и W_1 , выделяя в R_s фазовый множитель

$$R_s = \exp \{i s \alpha\} \tilde{R}_s,$$

и добиться упрощения уравнений (8):

$$\begin{aligned} (\tilde{\square}_I - A_I^2 f^2) \tilde{R}_I - B_I \lambda_I^- f \tilde{R}_{I-1} &= 0, & I \geq I, \\ (\tilde{\square}_{I-1} - A_{I-1}^2 f^2) \tilde{R}_{I-1} - B_{I-1} \lambda_{I-1}^- f \tilde{R}_{I-2} - B_I \lambda_{I-1}^+ f \tilde{R}_I &= 0, & I \geq |I-1|, \\ \dots \\ (\tilde{\square}_{-I+1} - A_{-I+1}^2 f^2) \tilde{R}_{-I+1} - B_{-I+1} \lambda_{-I+1}^- f \tilde{R}_{-I} - B_{-I} \lambda_{-I+1}^+ f \tilde{R}_{-I+2} &= 0, & I \geq |I-1|, \\ (\tilde{\square}_{-I} - A_{-I}^2 f^2) \tilde{R}_{-I} - B_{-I} \lambda_{-I}^+ f \tilde{R}_{-I+1} &= 0, & I \geq I, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\tilde{\square}_s = r^2 \partial_r^2 + 2r \partial_r + (\omega r + s W_0)^2 - s G r H - \hbar H^2 - \mu^2 - \lambda_s^2$.

Для регулярных монополей и дайонов группы $SU(2)$ с топологическим зарядом, равным единице, известно только одно точное решение [6]:

$$f = Cr / \operatorname{sh} Cr, \quad W_0 = \operatorname{sh} \gamma (Cr \operatorname{cth} Cr - 1), \quad H = \operatorname{ch} \gamma (Cr \operatorname{cth} Cr - 1),$$

найденное в пределе Богомольного—Прасада—Соммерфилда [7], которое описывает дайон с массой $4\pi C e^{-2} \operatorname{ch}^2 \gamma$, магнитным зарядом $1/e$ и электрическим зарядом $e^{-1} \operatorname{sh} \gamma$. Для более общих решений известно асимптотическое поведение вне монопольного ядра:

$$f=0, \quad W_0 = V_{\infty} r - Ze_0^2, \quad H = Fr - E, \quad (10)$$

где E, F, V_{∞} и Ze_0^2 — некоторые постоянные, которые в пределе Богомольного—Прасада—Соммерфилда равны

$$V_{\infty} = C \operatorname{sh} \gamma, \quad Ze_0^2 = \operatorname{sh} \gamma, \quad F = C \operatorname{ch} \gamma, \quad E = \operatorname{ch} \gamma. \quad (11)$$

При поиске спектра связанных состояний не обязательно знать точное распределение зарядов внутри монопольного ядра и для фоновых полей можно воспользоваться их асимптотическим поведением (10). Тогда система (9) диагонализуются по изоспину и для компонент с проекцией изоспина s получаем уравнение

$$\tilde{\square}_s \tilde{R}_s = 0, \quad I \geq |s|. \quad (12)$$

Решение его выражается через вырожденные гипергеометрические функции, в качестве которых удобно выбрать функции Уиттекера

$$\tilde{R}_s = \frac{1}{r} \{D_1 W_{qk}(2\kappa r) + D_2 M_{qk}(2\kappa r)\},$$

где

$$\kappa^2 = (\mu^2 + s G F + \hbar F^2) - (\omega + s V_{\infty})^2,$$

$$q = -\kappa^{-1} \left\{ s Z e_0^2 (\omega + s V_{\infty}) - E \left(\hbar F + \frac{s}{2} G \right) \right\},$$

$$k = \sqrt{\lambda_s^2 + 1/4 + \hbar E^2 - (s Z e_0^2)^2}.$$

Наложение при $\operatorname{Im} \kappa = 0$ требования регулярности в нуле и на бесконечности приводит нас к условию квантования $k - q + 1/2 = -n_r$, $n_r \in \mathbb{N}$.

Откуда получаем спектр связанных состояний скалярной частицы с проекцией изоспина s в поле регулярного дайона в виде

$$\omega = -sV_{\infty} + \left[1 + \left(s \frac{Ze_0^2}{n} \right)^2 \right]^{-1} \left\{ sE \frac{Ze_0^2}{2n^2} (sG + 2hF) \pm \right. \\ \left. \pm \left[(\mu^2 + sGF + hF^2) \left[1 + \left(s \frac{Ze_0^2}{n} \right)^2 \right] - \left(\frac{E}{2n} \right)^2 (sG + 2hF)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (13)$$

где $n = n_r + k + 1/2$.

Полученный спектр, вообще говоря, не имеет кулоновского характера, что связано с влиянием неоднородного поля Хиггса и кулоновской части электрического поля. В случае постоянного во всем пространстве (кроме, может быть, окрестности монополярного ядра) поля Хиггса (т. е. при $E=0$) спектр (13) будет иметь кулоновский вид:

$$(\omega + sV_{\infty})^2 = (\mu^2 + sGF + hF^2) [1 + (sZe_0^2/n)^2]^{-1},$$

что совпадает при $F=1$ с результатом [2].

Кулоновский спектр получается из (13) также в случае $e_0=0$:

$$(\omega + sV_{\infty})^2 = \mu^2 + F(sG + hF) - (E/2n)^2 (sG + 2hF)^2$$

и при $V_{\infty}=0$, $E=1$, $F=C$ совпадает с соответствующим выражением рабты [1].

Случай скалярных частиц с изоспином $1/2$ и 1 рассматривался в [4]. Однако в этой работе в окончательном выражении для энергии были допущены неточности, которые могут быть выявлены из сравнения с (13) при $s=\pm 1/2$ и $s=\pm 1$.

В пределе Богомольного—Прасада—Соммерфилда для изоспина $1/2$ и при $h=0$ рассматриваемая задача решалась в [3]. Эта работа также содержит ошибки и не согласуется с результатами других работ. Правильное выражение для спектра получается из (13) при $s=\pm 1/2$, $h=0$ и при использовании (11)

$$\omega = \mp \frac{C}{2} \operatorname{sh} \gamma + \left[1 + \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma}{2n} \right)^2 \right]^{-1} \left\{ G \frac{\operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} \gamma}{8n^2} + \right. \\ \left. + \varepsilon \sqrt{\left(\mu^2 \pm \frac{CG}{2} \operatorname{ch} \gamma \right) \left[1 + \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma}{2n} \right)^2 \right] - \left(\frac{G \operatorname{ch} \gamma}{4n} \right)^2} \right\},$$

где $\varepsilon = \pm 1$ (ср. с формулой (19) работы [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cox P. H., Yildiz A. // Phys. Rev. 1978. D18, N 4. P. 1211. [2] Rossi P. // Phys. Rep. 1982. 86, N 6. P. 317. [3] Tang J.-F. // Phys. Lett. 1983. 120B, N 4—6. P. 364. [4] Ajithkumar C. M., Sabir M. // Ann. of Phys. (N. Y.). 1986. 169, N 1. P. 117. [5] Witten E. // Phys. Rev. Lett. 1977. 38, N 3. P. 121. [6] Julia B., Zee A. // Phys. Rev. 1975. D 11, N 8. P. 2227. [7] Богомольный Е. В. // Ядерная физика. 1976. 24. С. 449; Prasad M. K., Sommerfield C. M. // Phys. Rev. Lett. 1975. 35, N 12. P. 760.

Поступила в редакцию
26.03.87