

РАДИОФИЗИКА

УДК 533.9; 533.7

К ТЕОРИИ РЕЗОНАНСНОГО ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В ПУЧКОВОЙ ПЛАЗМЕ

М. В. Кузелев, Ю. В. Бобылев, В. А. Панин

(кафедра общей физики для физического факультета)

Развивается нелинейная теория резонансного четырехволнового взаимодействия двух электромагнитных мод волновода с первой и второй гармониками волн плотности заряда пучка.

В настоящее время нелинейная динамика взаимодействия двух электромагнитных волн с пучковыми волнами плотности заряда изучена в целом ряде работ (см. напр., [1—6]). При этом в работах [5, 6], в частности, было рассмотрено взаимодействие волн в приближении слабой связи, когда строгие нелинейные уравнения можно разложить по степеням амплитуд волн и ограничиться учетом только кубических членов. Физический механизм, рассмотренный в [5, 6] и приводящий к появлению кубических нелинейностей, связан лишь с торможением электронного пучка. Однако генерация высших гармоник плотности пучка приводит к появлению дополнительных нелинейностей кубического типа. Наибольшую роль при этом (см. [7]) играет вторая гармоника плотности. Целью данной работы является изучение влияния второй гармоники плотности заряда пучка на динамику трехволнового взаимодействия (с учетом второй гармоники взаимодействие становится четырехволновым). В замагниченном плазменном волноводе с тонким пучком электронов такое взаимодействие можно описывать следующей системой нелинейных уравнений:

$$\frac{d\epsilon_\alpha}{d\tau} = -\nu\epsilon_\beta\rho_1 e^{i\eta_0\tau},$$

$$\frac{d\epsilon_\beta}{d\tau} = \beta\nu\epsilon_\alpha\rho_1^* e^{-i\eta_0\tau},$$

(1)

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (\rho_n e^{iny} - \text{к. с.}) + \frac{1}{2}\nu(\epsilon_\alpha\epsilon_\beta^* e^{iy-i\eta_0\tau} + \text{к. с.}),$$

$$\rho_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iny} dy_0.$$

Здесь $\epsilon_{\alpha,\beta}$ — безразмерные амплитуды электромагнитных волн плазменного волновода; τ — безразмерное время; y — нормированная на длину волны координата электрона пучка; η_0 — расстройка, причем равенство $\eta_0 = +1$ означает синхронизм с быстрой волной плотности заряда пучка, а $\eta_0 = -1$ — с медленной. Величина β определяет тип процесса, в частности, когда выполнено условие $\eta_0 = -1$, система уравнений (1) описывает процесс распада с повышением частоты при $\beta = +1$ и взрывной процесс при $\beta = -1$. Наконец, ν —

параметр, определяющий связь комбинационной электромагнитной волны с пучковой. Отметим, что $\nu \sim \delta\omega/\Omega_b$, где $\delta\omega$ — инкремент неустойчивости, а Ω_b — ленгмюровская частота электронов пучка в движущейся с ним системе координат. Коэффициенты a_n , содержащиеся в правой части уравнения движения системы (1), определяются конкретной геометрией задачи, причем всегда $a_1=1$. Последнее обусловлено следующим выбором безразмерного времени τ :

$$\tau = \Omega_b t. \quad (2)$$

Отметим, что уравнения, аналогичные системе (1), но записанные без учета генерации высших гармоник плотности пучка ($n=1$), получены в работе [5], где и приведен явный вид всех величин, входящих в систему (1). Однако генерация высших гармоник плотности, и прежде всего второй, должна приводить к заметному вкладу в нелинейное взаимодействие волн. Поэтому представляет интерес изучение динамики следующих четырехволновых процессов: взаимодействия двух электромагнитных волн плазменного волновода с первой и второй гармониками волн плотности заряда пучка. Именно этим вопросам и посвящена настоящая работа.

Известно, что в условиях слабой связи волн, когда

$$\nu \ll 1, \quad (3)$$

насыщение параметрических неустойчивостей определяется только кубическими нелинейностями [5]. Их вклад определяется процессами торможения электронного потока в среднем и генерацией высших гармоник плотности. В работе [7] был впервые предложен метод разложения по траекториям, который позволил существенно упростить в условиях слабой связи волн (3) систему уравнений (1). Кроме того, указанный метод гарантирует учет всех возможных кубических нелинейностей в рассматриваемой пучково-плазменной системе.

Следуя работе [7], представим траекторию электрона в виде

$$y = y_0 + w(\tau) + \tilde{X}(y_0, \tau), \quad (4)$$

где $w(\tau)$ — смещение, связанное с поступательным движением пучка, а $\tilde{X}(y_0, \tau)$ — 2π -периодическая функция y_0 , обусловленная взаимодействием волн. Кроме этого, разложим $\tilde{X}(y_0, \tau)$ в ряд Фурье:

$$\tilde{X}(y_0, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(\tau) e^{iny_0} + \text{к. с.}). \quad (5)$$

Далее, подставляя (4) и (5) в уравнения (1) и проводя соответствующие разложения (см. [7]), получим с точностью до членов третьего порядка малости следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{de_\alpha}{d\tau} &= \nu \varepsilon_\beta \left(ia_1 + \frac{1}{2} a_1^* a_2 - \frac{i}{8} |a_1|^2 a_1 \right) e^{i\eta_0 \tau - i w}, \\ \frac{de_\beta}{d\tau} &= \beta \nu \varepsilon_\alpha \left(ia_1^* - \frac{1}{2} a_1 a_2^* - \frac{i}{8} |a_1|^2 a_1^* \right) e^{-i\eta_0 \tau + i w}, \\ \frac{d^2 a_1}{d\tau^2} &= -a_1 + i(1 - \alpha_2) a_1^* a_2 + \frac{1}{2} (1 - \alpha_2) |a_1|^2 a_1 + \nu \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta^* e^{-i\eta_0 \tau + i w} - \\ &- \frac{1}{2} \nu \left[\frac{1}{2} |a_1|^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta^* e^{-i\eta_0 \tau + i w} + \left(ia_2 + \frac{1}{4} a_1^2 \right) \varepsilon_\alpha^* \varepsilon_\beta e^{i\eta_0 \tau - i w} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{d^2 a_2}{d\tau^2} = -\alpha_2 a_2 + \frac{1}{2} i (\alpha_2 - 1) a_1^2 + \frac{i}{2} \nu \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta^* a_1 e^{-i\eta_0 \tau + i\omega \tau}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \omega}{d\tau^2} = \frac{1}{4} \nu \left[\left(i a_1^* - \frac{1}{2} a_2^* a_1 - \frac{i}{8} |a_1|^2 a_1^* \right) \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta^* e^{-i\eta_0 \tau + i\omega \tau} + \right. \\ \left. + \left(-i a_1 - \frac{1}{2} a_2 a_1^* + \frac{i}{8} |a_1|^2 a_1 \right) \varepsilon_\alpha^* \varepsilon_\beta e^{i\eta_0 \tau - i\omega \tau} \right]. \end{aligned}$$

Полученная система уравнений справедлива при выполнении неравенства

$$|a_1| < 1. \quad (7)$$

Учет членов третьего порядка малости a_3 приводит к нелинейностям более высокого порядка, чем кубические, и превышает точность метода. Подробное процедуру «обрывания» бесконечной цепочки уравнений описана в работе [7].

Дальнейшее рассмотрение проведем для случая, когда $\eta_0 = -1$ (синхронизм с медленной волной плотности заряда пучка). Из первого, второго и последнего уравнений системы (6) следуют два первых интеграла:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\frac{1}{4} (|\varepsilon_\alpha|^2 - |\varepsilon_{\alpha 0}|^2), \quad (8)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{4} \beta (|\varepsilon_\beta|^2 - |\varepsilon_{\beta 0}|^2).$$

Делая далее замену переменных

$$\varepsilon_\alpha \rightarrow \varepsilon_\alpha e^{-i\omega/2}, \quad \varepsilon_\beta \rightarrow \varepsilon_\beta e^{i\omega/2}, \quad a_1 \rightarrow a e^{-i\eta_0 \tau}, \quad a_2 \rightarrow b e^{-2i\eta_0 \tau} \quad (9)$$

и считая ε_α , ε_β , a и b медленно меняющимися функциями (медленность амплитуд a и b обусловлена неравенством (3), подробнее см. [7]), получим следующую систему нелинейных уравнений, которая описывает взаимодействие двух электромагнитных волн и двух первых гармоник плазменных колебаний пучка:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_\alpha}{d\tau} + \frac{1}{8} i (|\varepsilon_\alpha|^2 - |\varepsilon_{\alpha 0}|^2) \varepsilon_\alpha = i\nu \left(1 - \frac{1}{8} |a|^2 \right) a \varepsilon_\beta + \frac{1}{2} \nu \varepsilon_\beta a^* b, \\ \frac{d\varepsilon_\beta}{d\tau} + \frac{1}{8} i \beta (|\varepsilon_\beta|^2 - |\varepsilon_{\beta 0}|^2) \varepsilon_\beta = i\nu \beta \left(1 - \frac{1}{8} |a|^2 \right) a^* \varepsilon_\alpha - \frac{1}{2} \nu \beta \varepsilon_\alpha a b^*, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} - \frac{3}{4} i |a|^2 a = -\frac{3}{2} a^* b - \frac{1}{2} i\nu \left[\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta^* \left(1 - \frac{1}{4} |a|^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(i b + \frac{1}{4} a^2 \right) \varepsilon_\alpha^* \varepsilon_\beta \right], \\ \frac{db}{d\tau} = \frac{3}{8} a^2 + \frac{1}{8} \nu \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta^* a. \end{aligned}$$

Система (10) имеет интегралы энергии

$$|\varepsilon_\alpha|^2 - |\varepsilon_{\alpha 0}|^2 = 2(|a|^2 + 4|b|^2), \quad |\varepsilon_\beta|^2 - |\varepsilon_{\beta 0}|^2 = -2\beta(|a|^2 + 4|b|^2),$$

выполнение которых контролировалось при проведении численных расчетов.

Подчеркнем, что в полученных уравнениях задано $\alpha_2=4$ (резонансный случай). Последнее соответствует линейному закону дисперсии плазменной пучковой волны ($\Omega_b \sim k$), когда возбуждение второй гармоники носит резонансный характер и ее вклад наиболее значителен (при $\alpha_2 \neq 4$ вклад второй гармоники мал [7]).

Система уравнений (10) не имеет достаточного количества первых интегралов и поэтому не может быть решена аналитически. Тем не менее качественное поведение системы можно установить из следующих рассуждений. Положим в уравнениях (10) $\nu=0$. При этом имеем систему

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\frac{3}{2} a^* b + \frac{3}{4} i |a|^2 a, \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{3}{8} a^2, \end{aligned} \quad (11)$$

описывающую взаимодействие двух плазменных пучковых волн между собой. Решение уравнений (11) запишется в виде

$$\begin{aligned} s &= s_0 \operatorname{cn}^2(z, r) + \frac{1}{2} s_0^{3/2} \operatorname{sn}^2(z, r), \\ \frac{1}{4} |a|^2 + |b|^2 &= \frac{1}{4} |a_0|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $s = |a|^2$ ($s_0 = |a_0|^2$), $z = (3/8) \sqrt{s_0} \tau$, $r = 1 - (1/2) \sqrt{s_0}$. Видно, что амплитуда первой гармоники с течением времени уменьшается (происходит распад) и при

$$\tau_1 = \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{s_0}} \ln(4s_0^{-1/4}) \quad (13)$$

она имеет минимальное значение. Таким образом, за время $\tau \gg \tau_1 \sim |a|^{-1}$ происходит многократный обмен энергией между плазменными пучковыми волнами. С другой стороны, из уравнений (10), если их записать в линейном приближении и считать при этом волну накачки $|\varepsilon_\beta|$ фиксированной, следует, что инкремент неустойчивости $\delta \sim \nu |\varepsilon_{\beta 0}|$. Отсюда при $|\varepsilon_{\beta 0}| \sim 1$ имеем характерное время взаимодействия волн ε_α , ε_β , a : $\tau_0 \sim 1/\nu$. Кроме этого, из системы уравнений (10) видно (см. [7]), что амплитуда $|a| \sim \nu^{1/2}$, т. е. $\tau_1 \sim \nu^{-1/2}$. Следовательно, при $\nu \ll 1$ $\tau_0 \gg \tau_1$. Последнее означает, что до насыщения электромагнитных волн ε_α и ε_β происходит многократный обмен энергией между плазменными пучковыми волнами.

Перейдем теперь к результатам численного исследования уравнений (10). На рис. 1 представлена временная динамика взрывного процесса ($\beta = -1$) при следующих значениях параметров: $|\varepsilon_{\alpha 0}| = 0,01$; $|\varepsilon_{\beta 0}| = 1$; $\nu = 0,1$. На рис. 2 при тех же значениях $|\varepsilon_{\alpha 0}|$, $|\varepsilon_{\beta 0}|$ и ν изображен процесс распада с повышением частоты. Из обоих рисунков хорошо видно многократное взаимодействие плазменных пучковых волн между собой, что подтверждает сделанные выше оценки. При этом оценка времени перекачки по формуле (13) дает значение $\tau \sim 4 \div 10$, что согласуется с рис. 1. Варьирование параметров $|\varepsilon_{\alpha 0}|$, $|\varepsilon_{\beta 0}|$ и ν не приводит к качественно другим результатам. Напомним, что время τ нормировано на частоту плазменных колебаний пучка Ω_b , величины a и b — на длину волны пространственного возмущения в пучке, а пара-

метр v и амплитуды ε_α и ε_β зависят от конкретного вида электродинамической системы и в общем виде приведены быть не могут.

Таким образом, по результатам работы можно сделать следующие выводы. В условиях слабой дисперсии пучковой волны плотности заряда имеет место перекачка энергии от первой ко второй гармонике этой волны с одновременной перекачкой энергии пучка в излучение.

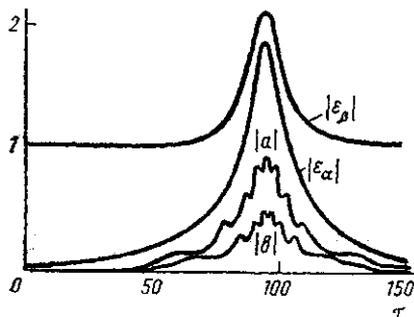


Рис. 1

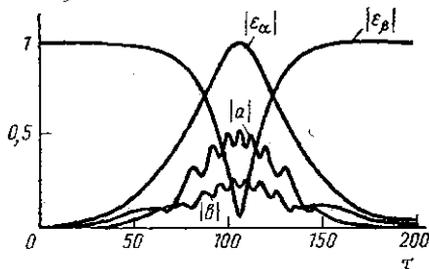


Рис. 2

Однако на средние значения амплитуд волн (ε_α , ε_β , a) эта перекачка существенно не влияет. Экспериментально указанный эффект наиболее сильно должен проявиться в низкочастотной области параметрического взаимодействия двух электромагнитных волн с медленной пучковой. Однако ни прямые, ни косвенные эксперименты по перекачке энергии между гармониками плотности нам не известны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Литвак А. Г., Петрухина В. И., Трахтенгерц В. Ю. // Письма в ЖЭТФ. 1973. 18, № 3. С. 190. [2] Огнивенко В. В. // Радиотехн. и электроника. 1982. 27, № 9. С. 1818. [3] Балакирев В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. 25, № 10. С. 1198. [4] Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. // ЖЭТФ. 1979. 76, № 3. С. 930. [5] Кузелев М. В., Панин В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. 27, № 4. С. 426. [6] Вильгельмсон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М., 1981. [7] Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Бобылев Ю. В., Панин В. А. // ЖЭТФ. 1986. 91, № 11. С. 1620.

Поступила в редакцию
10.03.87