АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 534.222

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕПЛОВОЙ САМОФОКУСИРОВКИ ЗВУКА В ЖИДКОСТИ

А. А. Карабутов, О. В. Руденко, О. А. Сапожников

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Получена упрощенная система уравнений для описания мощных акустических пучков в жидкости при наличии теплового самовоздействия. Указаны особенности тепловой самофокусировки звука, отличающие ее от самофокусировки света.

Волновые пучки большой интенсивности, как известно, могут испытывать самофокусировку [1]. Это явление заключается в образовании фокусирующей (или дефокусирующей) линзы самим пучком. Механизм самофокусировки может быть различным. В случае звуковых волн основным является тепловой механизм, связанный с зависимостью фазовой скорости от температуры, последняя в свою очередь определяется интенсивностью звука. Выпрямление волнового фронта расходящейся волны при тепловой самофокусировке звука (ТСФЗ), рост интенсивности звука на оси пучка, уменьшение ширины пучка наблюдались экспериментально [2, 3]. Описанию ТСФЗ посвящено большое количество теоретических работ [4—13]. Во многих из них ТСФЗ считается тождественной самофокусировке света и рассчитывается известными методами [1].

Однако ТСФЗ в жидкости имеет принципиальные особенности, без учета которых теоретическое описание неадекватно реальному процессу. 1. При поглощении звука жидкости передается импульс, на пять порядков больший, чем при поглощении равной световой энергии; возникает «акустический ветер». Этот «ветер», во-первых, увеличивает скорость звука на величину своей скорости, что дефокусирует пучок [13]; во-вторых, акустическое течение сильно перемешивает среду, вынося нагретые слои жидкости из области пучка — этот механизм стабилизации температуры намного эффективнее теплопроводности. 2. Для акустических излучателей типична сложная структура ближнего поля, тут само понятие границы пучка теряет смысл. Поэтому акустические измерения нужно проводить в дальней зоне, где эффект ТСФЗ ослаблен, так как волна становится сферически расходящейся. 3. Препятствует установлению акустической линзы тепловая конвекция, которая наряду с акустическим ветром перемешивает жидкость. 4. В сильновязких жидкостях ТСФЗ протекает на фоне «акустического самопросветления» [3, 14], вызванного уменьшением поглощения звука с ростом температуры. 5. Специфические черты ТСФЗ проявляются при больших значениях акустического числа Рейнольдса. При этом форма волны искажена, образуются ударные фронты. Нелинейное затухание ударных волн усиливает диссипацию энергии, и ТСФЗ происходит существенно поиному, нежели самофокусировка квазигармонических возмущений. У этого явления вообще нет оптического аналога.

Таким образом, ТСФЗ — эффект, отличающийся от самофокусировки света. Перейдем к выводу уравнений, описывающих самовоздей-

ствие звуковых пучков. Исходим из системы уравнений гидродинамики вязкой теплопроводящей жидкости:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{v}+\left(\xi+\frac{\eta}{3}\right)\nabla(\nabla\mathbf{v})+\rho\mathbf{g}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\mathbf{v})=0, \tag{2}$$

$$\rho T\left[\frac{\partial S}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)S\right]=\varkappa\Delta T+\xi(\nabla\mathbf{v})^2+\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\nabla\mathbf{v}\right)^2, \tag{3}$$

$$\rho=\rho(p,\ T), \tag{4}$$

$$S=S(p,\ T). \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость; ρ, S, p, T — плотность, энтропия, давление и температура среды; η, ξ — сдвиговая и объемная вязкости; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности; $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести.

Изменения параметров среды в области пучка связаны с возбуждением трех мод: акустической, гидродинамической и тепловой. Первая обусловлена быстрыми процессами (звук), две другие — медленными (течения и нагрев). Чтобы разделить эти моды, усредним (1)—(5) по промежутку времени, много большему периода звуковой волны (в экспериментах с ультразвуком $\sim 10^{-5}\div 10^{-6}$ с), но много меньшему характерного времени изменения скорости потока и температуры ($\sim 10^{0}\div 10^{2}$ с). Переменные представим как $\rho=\rho_0+\rho'+\rho''$, где ρ_0 — невозмущенное значение, ρ' — изменение, связанное со звуковой волной (среднее от него равно нулю), ρ'' — медленное изменение; аналогично представим S, p, T. Скорость запишем следующим образом [15]: $\mathbf{v}=\mathbf{v}'+\mathbf{U}-\rho'\mathbf{v}'/\bar{\rho}$, черта означает усреднение; последнее слагаемое здесь обеспечивает условие $\partial\bar{\rho}/\partial t+\nabla(\bar{\rho}\mathbf{U})=0$ (см. (2)), чтобы $\mathbf{U}$ имело смысл скорости гидродинамического потока.

Предположим, что возмущения параметров среды малы, пучок аксиально симметричный, слаборасходящийся, ось его направлена вертикально вниз. Используя упрощения, которые пояснены ниже, получим систему:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial p'}{\partial x}-\frac{\widetilde{M}}{c_0}\cdot\frac{\partial p'}{\partial\tau}-\frac{\varepsilon}{c_0^3\rho_0}p'\frac{\partial p'}{\partial\tau}-\frac{b}{2c_0^3\rho_0}\frac{\partial^2 p'}{\partial\tau^2}\right]=\frac{c_0}{2}\Delta_\perp p', \tag{6}$$

$$\widetilde{M}=U_x/c_0+\delta T'', \tag{7}$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial t}+U_x\frac{\partial U_x}{\partial x}+U_r\frac{\partial U_x}{\partial r}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial x}+F+\frac{\eta}{\rho_0}\Delta_\perp U_x-\beta g T'', \tag{8}$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_r)=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial T''}{\partial t}+U_x\frac{\partial T''}{\partial x}+U_r\frac{\partial T''}{\partial r}=\frac{\varkappa}{\rho_0 c_p}\Delta_\perp T''+\frac{c_0}{c_p}F, \tag{10}$$

$$F=\frac{b}{c_0^5\rho_0^3}\overline{(\partial p'/\partial\tau)^2}. \tag{11}$$

Здесь $(x,\ r)$ — цилиндрические координаты, ось x совпадает с осью пучка; $\tau=t-x/c_0$ — время в сопровождающей системе координат; $c_0=$

$=(\partial\rho/\partial p)_s^{-1/2}$ — невозмущенная скорость звука; $\varepsilon=1-c_0^4\rho_0(\partial^2\rho/\partial p^2)_s/2$ — нелинейный параметр; $b=\xi+4\eta/3$ — диссипативный параметр среды [15]; $\Delta_\perp=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$ — лапласиан по поперечной координате; $\delta=(\partial c/\partial T)_p/c_0$ — температурный коэффициент скорости звука c; $\beta=-(\partial\rho/\partial T)_p/\rho_0$ — термический коэффициент объемного расширения; c_p — теплоемкость среды. Квазидавление Буссинеска P_0 в (8) не зависит от r: $P_0=P_0(x, t)$.

Поясним идеи, лежащие в основе вывода (6)—(11) из исходной системы (1)—(5). Возмущения считаются малыми: $p'/(c_0^2\rho_0)$, $|\mathbf{U}|/c_0$, $|\mathbf{v}'|/c_0$, ρ'/ρ_0, $\delta T''$, $\beta T''\leqslant\mu$, где $\mu\ll1$ — параметр малости. Предположение о медленности изменения T'' и $\mathbf{U}$ запишем в виде $(\omega T'')^{-1}\partial T''/\partial t$, $(\omega|\mathbf{U}|)^{-1}|\partial\mathbf{U}/\partial t|\leqslant\mu^2$, здесь ω — циклическая частота звука. Пусть вязкость среды также невелика: $\eta\omega/(c_0^2\rho_0)$, $\xi\omega/(c_0^2\rho_0)\leqslant\mu$, а процессы теплопроводности и конвекции еще более слабые: $\varkappa\omega/(c_0^2\rho_0c_p)$, $g/(\omega c_0)\leqslant\mu^2$. Выписанные условия в экспериментах с ультразвуком, как правило, выполняются. Слабую расходимость акустического пучка и гидродинамического потока учтем следующим образом: v_r'/v_x', $U_r/U_x\leqslant\mu^{1/2}$, что всегда верно вблизи оси.

Анализ системы (1)—(5) показывает, что при указанных условиях оправдываются также следующие допущения. 1. Акустическое давление меняется медленно в сопровождающей системе координат на масштабах порядка длины волны, причем изменения вдоль оси пучка более медленны, чем поперек оси: $(\partial p'/\partial r)/(\omega p'/c_0)\leqslant\mu^{1/2}$, $(\partial p'\partial x)/(\omega p'/c_0)\leqslant\mu$, $p'=p'(x, r, \tau=t-x/c_0)$. 2. Аналогичные условия выполняются для всех медленных величин ($\mathbf{U}$, T'' и т. д), кроме p''. 3. Быстрые процессы адиабатичны: $S(p, T)-S(\bar{p}, \bar{T})\leqslant c_p\mu^3$. 4. Медленное возмущение давления очень мало: $p''\leqslant c_0^2\rho_0\mu^2$. 5. В отличие от остальных медленных величин p'' гораздо слабее меняется поперек пучка, чем вдоль его оси: $(\partial p''/\partial r)/(\omega p''/c_0)\leqslant\mu^{3/2}$, $(\partial p''/\partial x)/(\omega p''/c_0)\leqslant\mu$.

Усредним уравнения (1)—(3), получим уравнения для медленных возмущений. Вычитая их из соответствующих исходных уравнений, получим закон изменения быстрых величин. В уравнениях для звука оставим члены $\sim\mu^2$, а в уравнениях для T'' и $\mathbf{U}$, в силу медленности их изменения, члены $\sim\mu^3$. Уравнение непрерывности для $\mathbf{U}$ при этом достаточно выписать в приближении, учитывающем лишь члены $\sim\mu^2$, т. е. в виде (9). Кроме того, уравнение для $\partial U_r/\partial t$ можно не рассматривать — это приближение «квазиэккартовского» течения [16]. Уравнение состояния (4) разложим в ряд по возмущениям давления и температуры с точностью до членов $\sim\mu^3$. Наконец, уравнение (5) достаточно рассмотреть в линейном приближении, которое следует из термодинамических тождеств: $\Delta S=-(\beta/\rho)\Delta p+(c_p/T)\Delta T$, где ΔS и т. д. — приращения соответствующих величин. В результате, после некоторых преобразований, приходим к системе (6)—(11).

Полученная система (6)—(11) описывает все основные особенности самовоздействия звуковых пучков в жидкости. Уравнение (6) — для акустической моды. Оно является обобщением для сред с поперечной неоднородностью базового уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков (уравнения Хохлова—Заболотской [17]), последнее получается из (6) при $\tilde{M}\equiv0$. Функция $\tilde{M}$, описывающая акустическую неоднородность, может быть связана как с самовоздействием, так и с действием внешних факторов — заданного течения и температурного поля. Очевидно обобщение (7): $\tilde{M}=(\partial c/\partial q_\nu)q_\nu/c_0$, где $\{q_\nu\}$ — параметры, влияющие на скорость звука. Уравнения (8), (9) описывают

гидродинамический поток; эта мода возбуждается как под влиянием акустической моды, так и под действием архимедовой силы из-за нагрева. Уравнение (8) в своей основе уже использовалось ранее при описании акустического ветра [16]. Уравнение (10) описывает эволюцию поля температур при поглощении звука и перемешивании жидкости потоками; видно, что температурная мода также взаимодействует с двумя другими модами. Совместно с начальными и граничными условиями система (6)—(11) является замкнутой.

Необходимо отметить, что многие черты ТСФЗ присущи самофокусировке волн иной природы, например ионнозвуковых и магнитозвуковых волн в плазме, внутренних и поверхностных волн в океане. Поэтому ряд результатов развитой теории выходит за рамки проблем акустики и применим в более широком смысле. Так, до сих пор описанию поддавалась самофокусировка квазигармонических возмущений волновых пакетов. Но присутствие в волновом поле сильнонелинейных структур типа солитонов и ударных волн также может привести к эффектам самовоздействия, протекающего по качественно иным законам. Разрывные волны описываются уравнениями (6)—(11). Однако эта система может быть использована и для описания солитонов; для этого в (6) нужно добавить слагаемое вида $d\cdot\partial^4 p'/\partial\tau^4$, т. е. от модифицированного уравнения Хохлова—Заболотской [17] перейти к уравнению типа Кадомцева—Петвиашвили [18].

В заключение укажем, что из-за нелинейности уравнений полученной системы (6)—(11) решить ее в явном виде не представляется возможным. Описать отдельные стороны ТСФЗ можно лишь при дальнейшем упрощении уравнений применительно к конкретной ситуации. Для детального количественного исследования ТСФЗ требуется решать (6)—(11) на ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.//УФН. 1967. **93**, № 1. С. 19. [2] Андреев В. Г., Карабутов А. А., Руденко О. В., Сапожников О. А.//Письма в ЖЭТФ. 1985. **41**, № 9. С. 381. [3] Армеев В. Ю., Карабутов А. А., Сапожников О. А.//Акуст. журн. 1987. **33**, № 2. С. 177. [4] Mathur S. S., Sagoo M. S.//Can. J. Phys. 1974. **52**. P. 1726. [5] Khokhlov R. V., Zabolotskaya E. A.//Тр. VI Межд. симп. по нелин. акустике. М., 1976. Т. 1. С. 155. [6] Mathur S. S., Sagoo M. S.//Там же. С. 167. [7] Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.//Акуст. журн. 1976. **22**, № 1. С. 28. [8] Сардарян В. С., Шекоян А. В.//Акуст. журн. 1976. **22**, № 1. С. 101. [9] Сардарян В. С., Шекоян А. В.//Акуст. журн. 1976. **22**, № 2. С. 313. [10] Melkumyan G. H., Shekoyan A. V.//Phys. Stat. Sol. (a). 1978. **48**. P. 23. [11] Бункин Ф. В., Воляк К. И., Ляхов Г. А.//ЖЭТФ. 1982. **83**, № 2. С. 575. [12] Бункин Ф. В., Ляхов Г. А.//Тр. ФИАН. М., 1984. Т, 156. С. 3. [13] Заболотская Е. А.//Акуст. журн. 1976. **22**, № 2. С. 222. [14] Ассман В. А. и др.//Акуст. журн. 1986. **32**, № 1. С. 138. [15] Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., 1975. [16] Гусев В. Э., Руденко О. В.//Акуст. журн. 1979. **25**, № 6. С. 875. [17] Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.//Акуст. журн. 1969. **15**, № 1. С. 40. [18] Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.//ДАН СССР. 1973. **208**, № 4. С. 794.

Поступила в редакцию
05.03.87