1979. 77. С. 1076. [4] Tsushima K., Tamaki T., Yamaura R.//Тр. Междунар. конф. по магнетизму (МКМ-73). М. 1974. Т. 5. С. 270. [5] Jacobs J. S., Burne H. F., Levinson L. M.//J. Appl. Phys. 1971. 42. P. 1631. [6] Кадомцева А. М. и др.//ЖЭТФ. 1981. 81. С. 702.

Поступила в редакцию
06.04.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 4

УДК 530.145—531.787

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В НЕОДНОРОДНО НАПРЯЖЕННОМ ПРОВОДНИКЕ

В. И. Григорьев, Е. В. Григорьева

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

На основе модели Томаса—Ферми проводится теоретическое исследование электрического поля в химически однородном изотермическом проводнике в зависимости от распределения плотности, порождаемого неоднородными напряжениями.

Появление электростатического поля внутри проводника в результате действия на этот проводник гравитационного поля было предметом довольно оживленного обсуждения, начавшегося около двух десятилетий назад. Первую оценку для электрического поля, «наведенного» гравитационным воздействием, опубликовали, по-видимому, Барнхилл и Шифф [1]. Поле Барнхилла—Шиффа было подвергнуто как теоретическому, так и экспериментальному исследованию в ряде работ (см., напр., [2—7]). Хотя сам факт существования электрического поля такого рода установлен достаточно надежно, в оценках его величины имеется значительный разнобой. Это обусловлено, в частности, по нашему мнению, тем, что появление электрического поля вызывается несколькими различными физическими причинами, и разные авторы фиксируют внимание на различных механизмах поляризации. Правда, имеются и такие подходы, которые как бы маскируют механизм поляризации. Так, простейшая оценка для поля, фактически использованная уже в [1], основывается на таком элементарном рассуждении: гравитационное поле напряженности $\mathbf{G}$ действует на ион массы M с силой $M\mathbf{G}$; ион находится в равновесии, если возникает электрическое поле с такой напряженностью $\mathbf{E}$, что электрическая сила $e\mathbf{E}$ уравновешивает гравитационную: $M\mathbf{G}+e\mathbf{E}=0$; отсюда получается оценка $\mathbf{E}=-(M/e)\mathbf{G}$, но вопрос, почему появляется поле, обходится.

Цель настоящей заметки — оценить роль «концентрационного» механизма формирования электрического поля. Имеется в виду, что даже в химически однородном и поддерживаемом при постоянной температуре проводнике первого рода при наличии градиентов плотности (т. е. при неоднородных напряжениях, вызываемых внешними воздействиями) должно появляться электрическое поле. Физическая причина возникновения этого поля может быть пояснена достаточно наглядно. Носителями массы являются почти исключительно ионы (атомные остовы), одновременно несущие положительные электрические заряды. Если внешние воздействия вызывают повышение плотности в некоторых участках проводника, то там возникает избыточный положительный заряд, так как «облако» валентных электронов благодаря квантовомеханическим эффектам и в первую очередь принципу Паули обладает некоторой дополнительной жесткостью, препятствующей полной

компенсации заряда, а значит, и обращению в нуль электростатического поля.

Попытаемся оценить этот эффект количественно, воспользовавшись хотя и довольно грубой, но зато простой моделью Томаса—Ферми*.

Полный макроскопический, т. е. усредненный по физически бесконечно малым объемам, потенциал электростатического поля имеет вид $V=V^{(+)}+V^{(-)}$, где $V^{(+)}$ — потенциал поля, порождаемого положительными зарядами атомных остовов, а $V^{(-)}$ — потенциал отрицательно заряженного «облака» электронов проводимости.

Потенциал $V^{(+)}$ определяется уравнением Пуассона

$$\triangle V^{(+)}=-4\pi\rho^{(+)}. \tag{1}$$

Плотность положительных зарядов $\rho^{(+)}$ может быть представлена в виде $\rho^{(+)}=(e/M)\tau$, где e — заряд иона, который для простоты полагается ниже равным модулю заряда электрона, M — масса иона, τ — механическая плотность.

Потенциал $V^{(-)}$ электрического поля электронов проводимости будет получен ниже в приближении Томаса—Ферми. Обратимся к вариационному подходу. Полная энергия электронов проводимости $\mathscr{E}=\mathscr{E}_{\text{кин}}+\mathscr{E}_{\text{пот}}$. Кинетическая энергия $\mathscr{E}_{\text{кин}}$ в модели Томаса—Ферми записывается в виде $\mathscr{E}_{\text{кин}}=\varkappa\int dv n^{5/3}$, где n — число электронов в единице объема, $\varkappa\equiv(3/10)(3\pi^2)^{3/2}e^2a_B=2{,}871e^2a_B$, a_B — боровский радиус; интегрирование здесь и далее ведется по всему объему проводника.

Потенциальная энергия $\mathscr{E}_{\text{пот}}$ может быть разбита на две части:

$$\mathscr{E}_{\text{пот}}=-e\int dv\, nV^{(\text{внешн})}+\frac{e^2}{2}\int dv\, dv'\,\frac{n(\mathbf{r})\,n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Первая часть определяется потенциалом «внешнего» поля, роль которого в обсуждаемой задаче играет $V^{(+)}$, а вторая — энергия взаимодействия электронов проводимости. Полное число электронов проводимости $N=\int dvn$ постоянно и определяется условием нейтральности проводника в целом.

Запишем вариационное условие в виде $\delta\{\mathscr{E}+e\lambda N\}=0$ (обозначение $e\lambda$ для множителя Лагранжа выбрано для удобства). Подставив выписанные выше выражения для $\mathscr{E}$ и N и проварьировав, получаем

$$\frac{5}{3}\varkappa n^{2/3}-eV^{(\text{внешн})}-eV^{(-)}+e\lambda=0, \tag{2}$$

где $V^{(-)}(\mathbf{r})=-e\int dv'\,\frac{n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ — потенциал электрического поля, порождаемого электронами проводимости. Этот потенциал связан с n уравнением Пуассона

$$\triangle V^{(-)}=4\pi en. \tag{3}$$

Находя из (2) выражение для n и подставляя его в (3), получаем

$$\triangle V^{(-)}=4\pi e\left(\frac{3e}{5\varkappa}\right)^{3/2}(V^{(\text{внешн})}+V^{(-)}-\lambda)^{3/2}. \tag{4}$$

---

* Нетрудно включить в рассмотрение как обменные, так и другие известные поправки к модели Томаса—Ферми, однако это не меняет качественной картины, обсуждаемой ниже. Все количественные оценки по модели Томаса—Ферми могут претендовать на точность только по порядку величины.

Полный потенциал $V=V^{(\text{внешн})}+V^{(-)}=V^{(+)}+V^{(-)}$ удовлетворяет уравнению

$$\triangle V=4\pi e\left(\frac{3e}{5\varkappa}\right)^{3/2}(V-\lambda)^{3/2}-\frac{4\pi e}{M}\tau,$$

получающемуся, если сложить (4) с (1). Поскольку прибавление постоянной к потенциалу не меняет напряженности электрического поля, удобно произвести замену $V-\lambda\Rightarrow V$ и переписать уравнение для потенциала в более удобной форме:

$$\triangle V=4\pi e\left(\frac{3e}{5\varkappa}\right)^{3/2}V^{3/2}-\frac{4\pi e}{M}\tau. \tag{5}$$

Полученное таким образом уравнение и является в рассматриваемом приближении основой для исследования электрических полей в проводниках в зависимости от распределения в них плотности.

Потенциал V при постоянной плотности $\tau=\text{const}=\tau_0$ должен быть постоянным: электрическое поле отсутствует. Это постоянное значение потенциала $V=V_0$ можно определить условием

$$4\pi e\left(\frac{3e}{5\varkappa}\right)^{3/2}V_0^{3/2}=\frac{4\pi e}{M}\tau_0. \tag{6}$$

Однако, когда плотность τ меняется от точки к точке: $\tau=\tau(\mathbf{r})$, постоянное значение потенциала уже перестает удовлетворять уравнению (5); это показывает, что электрическое поле возникает при появлении неоднородностей плотности в неоднородно деформированном химически однородном и имеющем даже постоянную температуру проводнике. Это утверждение и составляет содержание основного качественного результата настоящей работы.

Подобно тому, как это всегда делается в феноменологических теориях явлений переноса, можно учесть влияние градиентов плотности на формирование электрического поля в проводнике, записывая закон Ома в обобщенной форме

$$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}+\gamma\nabla\tau \text{ или } \mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}+\eta\nabla p. \tag{7}$$

В равновесных ситуациях $\mathbf{j}=0$, но $\mathbf{E}=-(\gamma/\sigma)\nabla\tau\neq0$. Именно это и подразумевалось, когда мы выше говорили о пьезоэлектричестве в проводниках. Конечно, здесь в большей мере проявляется внешняя аналогия, а не схожесть физического существа физических процессов. Если уж искать «родственные» эффекты, то скорее следовало бы обратиться к контактным явлениям. Только в случае контактных явлений различие в работах выхода электронов из различных веществ определяется различием их химического состава, тогда как обсуждаемый нами эффект можно истолковать как следствие уменьшения этой работы выхода при сжатии проводника.

Попытаемся теперь оценить масштаб эффекта. Обратимся к наиболее простому одномерному варианту задачи.

Положим, что $\tau=\tau_0+\tau_1(x)$, где $\tau_1(x)$ — малая добавка к «невозмущенной» плотности τ_0. Естественно ожидать, что и «возмущения» потенциала также будут малыми, так что можно записать:

$$V=V_0+V_1(x);\qquad V_1(x)\ll V_0;\qquad V^{3/2}\approx V_0^{3/2}+(3/2)V_0^{1/2}V_1(x). \tag{8}$$

После такой линеаризации уравнение для $V_1(x)$ принимает вид

$$\frac{d^2}{dx^2}V_1(x)=4\pi e\left(\frac{3e}{5\varkappa}\right)^{3/2}\left\{V_0^{3/2}+\frac{3}{2}V_0^{1/2}V_1(x)\right\}-\frac{4\pi e}{M}\tau_0-\frac{4\pi e}{M}\tau_1(x).$$

Учитывая условие (6), можно упростить это уравнение:

$$\frac{d^2}{dx^2}V_1(x)=A^2V_1(x)-\frac{4\pi e}{M}\tau_1(x);\quad A^2\equiv\frac{18\pi e^2}{5\varkappa}\left(\frac{\tau_0}{M}\right)^{1/3}. \tag{9}$$

Полученное уравнение допускает решение в квадратурах:

$$V_1(x)=\frac{4\pi e}{M}\left\{\varphi_1\int dx\,\frac{\varphi_2\tau_1}{\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2}-\varphi_2\int dx\,\frac{\varphi_1\tau_1}{\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2}\right\}+C_1\varphi_1+C_2\varphi_2,$$

где φ_1 и φ_2 — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения $V_1''=A^2V_1$. Постоянные C_1 и C_2 в обсуждаемой нами задаче нужно принять равными нулю, так как $V_1\to 0$ при $\tau_1\to 0$.

Подставляя $\varphi_{1,2}=e^{\pm Ax}$, получаем

$$V_1(x)=\frac{2\pi e}{MA}\left\{e^{-Ax}\int dx\,\tau_1(x)\,e^{Ax}-e^{Ax}\int dx\,\tau_1(x)\,e^{-Ax}\right\}$$

плюс постоянная интегрирования, которую мы положим равной нулю.

Дальнейшая конкретизация требует задания вида $\tau_1(x)$. Пусть, например, $\tau_1(x)$ линейно зависит от x: $\tau_1(x)=ax$. Если деформация, вызвавшая появление неоднородности плотности, подчиняется закону Гука, то множитель пропорциональности a должен быть обратно пропорционален модулю упругости B и прямо пропорционален объемной плотности силы, вызывающей деформации (в данном случае, когда деформации упругие, а $\tau_1=ax$, эта плотность является постоянной и сила направлена вдоль оси x); множитель a пропорционален также «невозмущенной» плотности τ_0.

Потенциал V_1 получается при этом равным $V_1=[4\pi ea/(MA^2)]x$, а поле оказывается однородным и имеющим напряженность $|\mathbf{E}|=4\pi ea/(MA^2)$. Поле это направлено противоположно градиенту $\nabla\tau$, что находится в соответствии с той картиной распределения зарядов, которая была указана выше. Нужно, однако, заметить, что поскольку электрическое поле получилось в обсуждаемом примере однородным, объемная плотность заряда равна нулю, так что поле порождается только поверхностными зарядами.

Экспериментальная реализация рассмотренной выше одномерной задачи, в которой зависящая от x часть плотности τ_1 меняется по линейному закону, очевидна: помещенная в поле тяготения плоскопараллельная плита, толщина которой много меньше ее горизонтальных размеров, покоящаяся на достаточно жесткой горизонтальной опоре. В такой плите плотность распределяется по закону $\tau=\tau_0-(g\tau_0^2/B)x$, где g — ускорение свободного падения, B — модуль сжатия, так что постоянная a оказывается равной $a=-g\tau_0^2/B$, а напряженность поля $|E|=4\pi eg\tau_0^2/(MA^2B)\approx 10^{-8}$ В/см. Заметим, что эта величина близка к полученной Барнхиллом и Шиффом, а затем и подтвержденной в некоторых из указанных выше экспериментов.

Одномерная задача, рассмотренная выше, позволяет найти параметр γ из обобщенного закона Ома [7]:

$$\gamma=\frac{4\pi e}{MA^2}\sigma\approx\frac{8\cdot 10^{-18}}{\tau_0^{1/3}M^{1/3}}\sigma.$$

Полученное таким образом выражение для γ справедливо, конечно, и в общем случае, когда задача уже перестает быть одномерной и когда появление градиентов плотности вызвано необязательно гравитационными, но и иными внешними воздействиями, порождающими

неоднородные напряжения в проводнике. Электрические поля, возникающие в проводниках при неоднородных напряжениях, могут позволить исследовать эти напряжения электрическими методами.

Полученные выше оценки применимы лишь при давлениях, значительно меньших фермиевских. При больших же давлениях необходимо учитывать уменьшение размеров атомных ячеек и порождаемую этим зависимость химического потенциала от давления, что должно явиться предметом отдельной публикации.

Пользуемся возможностью поблагодарить Н. А. Свешникова, Ю. И. Нечаева, И. А. Квасникова и Ю. В. Горохова, с которыми мы обсуждали эту работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Schiff L. I., Barnhill M. V.//Phys. Rev. 1966. **151**. P. 1067. [2] Dessler A. J., Michel F. C., Rorschach H. E., Trammel G. T.//Phys. Rev. 1968. **168**. P. 737. [3] Herring C.//Phys. Rev. 1968. **171**. P. 1361. [4] Harrison W. A.//Phys. Rev. 1969. **180**. P. 1606. [5] Rieger I. J.//Phys. Rev. 1970. **B2**, N 4. P. 825. [6] Leung M. C.//Nuovo Cim. 1972. **7**, N 2. P. 220. [7] Kumar N., Nadini R.//Phys. Rev. 1973. **D7**, N 12. P. 3586.

Поступила в редакцию
09.04.87