АСТРОНОМИЯ

УДК 521.13

СОИЗМЕРИМОСТЬ 2 : 1 С МИМАСОМ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВА В КОЛЬЦЕ САТУРНА

И. А. Герасимов, Е. Л. Винников, В. В. Чазов

(ГАИШ)

Показано, что положению точной соизмеримости 2:1 с Мимасом отвечает локальный минимум в распределении оптической плотности в делении Кассини. При вычислениях учитывались гармоники J_2, J_4.

Данные с космического аппарата Вояджер-2 позволили детализировать распределение вещества кольца Сатурна вблизи деления Кассини. Поэтому представляется интересным сопоставить распределение оптической плотности с положением частицы кольца, которая находится в соизмеримости 2 : 1 со средним движением Мимаса — одного из спутников Сатурна.

1. Круговое движение точки в экваториальной плоскости однородного сфероида. Рассмотрим движение пассивно гравитирующей точки P в экваториальной плоскости однородного сфероида P_0 единичной массы. Начало координат выберем в центре масс P_0, а плоскость XY совместим с его экваториальной плоскостью. Положим также экваториальный радиус P_0 $r_0=1$, и пусть гравитационная постоянная $f=1$. Тогда уравнения движения точки P примут вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial W}{\partial x};\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial W}{\partial y}, \tag{1}$$

где $W=\frac{1}{\rho}\left\{1-\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{2k}\rho^{-2k}\right\}$, $\gamma_{2k}=J_{2k}P_{2k}(0)$, $P_{2k}(x)$ — полиномы Лежандра.

Перейдем далее к полярным координатам, полагая $\rho^2=x^2+y^2$, тогда $x=\rho\cos u$, $y=\rho\sin u$. В новых переменных уравнения (1) примут вид

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{du}{dt}\right)^2=\frac{\partial W}{\partial\rho},\quad \frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{du}{dt}\right)=0. \tag{2}$$

Последнее уравнение дает нам интеграл площадей:

$$\rho^2\frac{du}{dt}=c, \tag{3}$$

где $c=\text{const}$.

Если теперь положить $R=W-c^2/(2\rho^2)$, то уравнение для ρ будет таким:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}=\frac{\partial R}{\partial\rho}. \tag{4}$$

Пусть

$$\frac{\partial R}{\partial\rho}=0. \tag{5}$$

Тогда $a=\text{const}$ будет решением (4), и из (3) находим

$$u=u_0+n(t-t_0), \tag{6}$$

где $n=c/a^2$.

Подставив в (5) выражение для R, с учетом выражения для W получим

$$\frac{c^2}{\rho^3}-\frac{1}{\rho^3}+\sum_{k=1}^{\infty} g_{2k}\rho^{-2-2k}=0,$$

здесь $g_{2k}=(2k+1)\gamma_{2k}$. Подставляя теперь $\rho=a$, получаем

$$a-c^2+\sum_{k=1}^{\infty} g_{2k}a^{1-2k}=0,$$

или

$$a-n^2a^4+\sum_{k=1}^{\infty} g_{2k}a^{1-2k}=0. \qquad (7)$$

Таким образом, точка будет совершать круговое движение с периодом $T=2\pi/n$, а уравнение (7) определит радиус орбиты.

2. **Система Сатурна.** Обратимся теперь к системе спутников Сатурна. Все они, за исключением трех, имеют орбиты, наклон которых к плоскости экватора Сатурна не превышает 1,5°, а эксцентриситеты ограничены величиной 0,03 [1]. Таким образом, в первом приближении они вполне удовлетворяют рассмотренной нами модели.

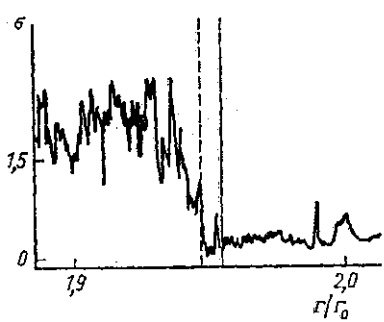
Рассмотрим далее случай Мимаса. Его период обращения $T_0=0{,}942$ сут. Определим теперь величину радиуса a круговой орбиты частицы, период обращения T которой соизмерим с T_0: $Tq=T_0p$, причем p, q — взаимнопростые натуральные числа. Тогда $n=2\pi q/(T_0p)$. Подставив это выражение в (7) и ограничиваясь $k\leqslant 2$, получим следующее уравнение для определения радиуса орбиты a:

$$a-\left(\frac{2\pi q}{T_0p}\right)^2a^4-\sum_{k=1}^{2} g_{2k}a^{1-2k}=0, \qquad (8)$$

где $g_2=-(3/2)J_2$, $g_4=(15/8)J_4$. Для самого Сатурна примем значения из работы [2]: $r_0=6\cdot10^4$ км, $J_2=1{,}64\cdot10^{-2}$, $J_4=-9{,}37\cdot10^{-4}$.

Отношение массы Солнца к массе системы Сатурна равно 3498,09. Если учесть, что по сравнению с массой Титана, составляющей $2{,}388\cdot10^{-4}$ от массы Сатурна [2], масса остальных спутников пренебрежимо мала, то отношение массы Солнца к массе самого Сатурна составит 3498,93. Таким образом, в нашей системе единиц $T_0=34{,}194$.

Решенное для случая $p=1$, $q=2$, уравнение (8) дает $a=1{,}9533$ (в единицах r_0). Если же пренебречь зональными гармониками, т. е. считать Сатурн сферически-однородным, то $a=1{,}9491$. Видно, что для реального Сатурна величина радиуса орбиты



Распределение оптической плотности вещества вблизи деления Кассини и положения соизмеримости 2:1 с Мимасом, вычисленные для сферической модели фигуры Сатурна (пунктир) и с учетом гармоник J_2, J_4 (вертикальная прямая)

частиц больше соответствующего радиуса для модели Сатурна без сжатия. Если на диаграмме (рисунок) распределения оптической плотности частиц колец Сатурна в зависимости от расстояния от его центра [3] отметить полученные выше значения a (пунктир — для сферической модели Сатурна и сплошная линия — для реального сфероида этой планеты), то видно, что при учете сжатия отмеченному радиусу

реальной орбиты соответствует локальный минимум распределения. Если не учитывать влияния гармоник J_2 и J_4, то мы придем к заключению, что соизмеримости 2 : 1 соответствует локальный максимум.

Таким образом, как и в случае резонансных групп астероидов, так и для кольца Сатурна точному значению соизмеримости отвечает локальный минимум распределения вещества [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Абалакин В. К. и др. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М., 1976. [2] Null G. W., Lau E. L., Biller E. D., Anderson J. D.//Astron. J. 1981. 86, N 3. P. 456. [3] Alfven H., Axnäs I., Brenning N., Lindqvist P.-A.//Planet Space Sci. 1986. 34, N 2. P. 148. [4] Герасимов И. А., Винников Е. Л.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1987. 28, № 5. С. 94.

Поступила в редакцию
13.01.88