

зависимостей нейтринного и электронного полей от дополнительных координат, изложенные в [1, 2].

В заключение подчеркнем, что 6-мерный геометрический и общепринятый 4-мерный калибровочный подходы не следует противопоставлять друг другу. Скорее всего их следует понимать как дополняющие друг друга, как два различных взгляда на совокупность физических взаимодействий. Подобная ситуация имеет место в теории гравитации, допускающей как геометрическую (эйнштейновскую), так и калибровочную формулировку. Заметим также, что аналогичный метрический способ ввода W -бозонов можно распространить и на 7-мерную модель грави-электро-слабых взаимодействий (с учетом поколений частиц), в основных чертах изложенную в работах [2, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Владимиров Ю. С. Препринт физ. фак. МГУ № 16/1985. М., 1985.
 [2] Владимиров Ю. С. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. М., 1987. [3] Кислов В. В., Таранов И. В. // Гравитация и электромагнетизм. Минск, 1986. С. 25. [4] Владимиров Ю. С., Гаврилов В. Р. // Там же. С. 39. [5] Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В. Калибровочные поля. М., 1986. [6] Владимиров Ю. С. Препринт физ. фак. МГУ № 16/1986. М., 1986.

Поступила в редакцию
13.04.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 5

УДК 530.145.6

ОСОБЕННОСТИ ПАДЕНИЯ НА ЦЕНТР В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В. Б. Гостев, И. В. Гостев, А. Р. Френкин

(кафедра теоретической физики)

Показано, что известное в литературе падение на центр основного состояния одномерного атома водорода присуще всем потенциалам вида $\lambda|x|^{-\nu}$, $0 < \nu < 2$, но может быть легко устранено физическим выбором самосопряженного расширения гамильтониана.

Квантовомеханическое описание падения на центр в притягивающем центральном поле подробно дано в монографиях [1, с. 145—146] и [2]. В одномерном ($-\infty < x < \infty$) четном поле $V(|x|)$ наблюдаются аномалии, заключающиеся в том, что для потенциалов с особенностью

$$W = \lambda|x|^{-\nu}, \quad (1)$$

$\lambda < 0$, $\nu = 1$; $-1/4 < \lambda < 0$, $\nu = 2$ при некотором выборе граничного условия при $x = 0$ имеет место падение на центр основного (четного) состояния $E_0 \rightarrow -\infty$, $\psi_0^2(x) \rightarrow \delta(x)$ ($\nu = 1$ [3], $\nu = 2$ [4]) в отличие от центральных потенциалов с теми же особенностями, когда $|E_0(\lambda)| < \infty$. Здесь и далее положено $\hbar = 2m = 1$.

Так как потенциалы (1) имеют важное физическое значение ($\nu = 1$ [1, с. 527, 528]; $\nu = 2$ [5]), то представляет интерес исследование падения на центр и связанного с ним вырождения уровней по четности [3], [1, с. 528], [4] в общем случае ($\lambda < 0$, $1 \leq \nu < 2$ (1)).

В [6] было высказано предположение о связи падения в кулоновском поле с его повышенной симметрией [1, с. 154—156], то же можно предположить и для центростремительного случая $\nu = 2$, когда также

имеет место повышенная симметрия при свободном движении и движении в осцилляторном поле [7].

Однако кажется очень странным исчезновение падения при $1 < v < 2$. В настоящей статье мы покажем, что 1) фактически падение имеет место при $v \neq 1, 2$; 2) оно вызвано не сингулярностью взаимодействия (1), а δ -образной ямой; 3) оно не связано с повышенной симметрией; 4) это падение нефизично и легко устранимо изменением граничных условий при $x=0$. Будет объяснена и связь вырождения по четности с падением.

Для простоты изложения ограничимся случаем четного удерживающего потенциала $V(x) = V(-x)$, $V(0) = 0$, $V'(x) > 0$ при $x > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ (например, $V(x) = x^2$), дополненного потенциалом (1), когда спектр чисто дискретный [8]. В этом случае стационарное уравнение Шрёдингера при $x \rightarrow +0$ имеет два независимых решения $\psi_{\pm}(x) \in L_2(0, a)$ ($1 \leq v < 2$, $-\infty < E < \infty$) [9], переходящих при $\lambda \rightarrow 0$ в четное (нечетное) решение с гладким потенциалом. Выбрав в качестве нечетных собственных функций решения $\psi_-(x)$, а в качестве четных

$$\psi_{\alpha} = N(\cos \alpha \psi_+(|x|) + \sin \alpha \psi_-(|x|), \quad -\pi/2 < \alpha \leq \pi/2, \quad (2)$$

получим однопараметрическое (по α) семейство самосопряженных расширений дифференциального оператора Гамильтона. Собственные функции этих расширений удовлетворяют граничным условиям

$$\psi_{\alpha}(0) = \cos \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow +0} M(x, \lambda, v, \psi_{\alpha}(x), \psi'_{\alpha}(x)) = \operatorname{tg} \alpha, \quad (3)$$

где M — нелинейная функция [9], переходящая при $\lambda \rightarrow 0$ (1) в выражение $\psi'(0)\psi^{-1}(0)$, выделяющее самосопряженные расширения несингулярного гамильтониана [2].

При $1 < v \leq 2$, когда $\psi'_+(0) = \infty$, ряд аргументов [4, 9] приводит к $\alpha = 0$. Одним из аргументов является минимальное число слагаемых в индуцированном (1) дополнительном точечном потенциале, возникающем за счет разрыва производной ψ'_{α} при $x \rightarrow 0$,

$$U_{\delta} = \lambda V_v + V_{\delta}, \quad V_{\delta} = 2 \operatorname{tg} \alpha \delta(x), \quad -\pi/2 < \alpha < \pi/2, \quad (4)$$

$$U_{\delta} = 2|x|^{-1} \delta(x), \quad \alpha = \pi/2. \quad (5)$$

Уровни энергии находятся из условия

$$\psi_{\alpha}(x) = C_- \psi(x), \quad (6)$$

где $-\psi(x)$ — решение уравнения Шрёдингера ($-\infty < E < \infty$), регулярное на бесконечности ($\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$, $-\psi(x) \in L_2(0, \infty)$). Условие (6) эквивалентно трансцендентному уравнению

$$g(E) = h, \quad g(E) = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi_+(E, x)}{\psi_-(E, x)}, \quad h = \operatorname{tg} \alpha. \quad (7)$$

Полюсы $g(E)$ на вещественной оси ($h \rightarrow \operatorname{tg} \pi/2$) определяют нечетные уровни E_{n-} , $n=0, 1, 2, \dots$, среди которых имеется наинизший $E_0 > -\infty$ [1, с. 145, 146].

Важным свойством функции $g(E)$ является ее монотонное возрастание при $E < E_0$, $E_{n-} < E < E_{(n+1)-}$, $n=0, 1, 2, \dots$. Его можно доказать, воспользовавшись тем, что при $E \neq E_{n-}$ согласно (4), (7)

$$\frac{dg}{dE} = \left(\frac{dE}{dh} \right)^{-1} = V_{\delta n n}^{-1} > 0, \quad (8)$$

где

$$V_{\delta n n} = \frac{dE_{n\alpha}}{dh} \Big|_{h=\text{tg}\alpha} = 2N_{n\alpha}^2 \int_0^{\infty} \Psi_{n\alpha}^2(x) \delta(x) dx = N_{n\alpha}^2 \cos^2 \alpha > 0, \quad (9)$$

$\Psi_{n\alpha}$ — n -я четная собственная функция расширения гамильтониана с параметром α . Формула (9) справедлива независимо от применимости теории возмущений [10].

Из неравенства (8) следует, что при $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$

$$E_{0\alpha} < E_{0-}; \quad E_{(n-1)-} < E_{n\alpha} < E_{n-}, \quad n > 0, \quad (10)$$

т. е. имеет место осцилляторная теорема [1, с. 83], вырождения по четности нет,

$$\frac{dE_{n\alpha}}{d\alpha} > 0, \quad n \geq 0, \quad \begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -\pi/2} E_{n\alpha} &= E_{(n-1)-}, \quad n > 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} E_{n\alpha} &= E_{n-}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Значит, вырождение по четности имеет место лишь при $\alpha \rightarrow -\pi/2$, когда дополнительный потенциал наиболее сингулярен (5), что приводит к явлению Клаудера [8].

Падение на центр возможно лишь для невырождающегося при $\alpha \rightarrow -\pi/2$ уровня $E_{0\alpha}$, так как $E_{n\alpha} > E_{0-} > -\infty$ при $n > 0$. Эта возможность действительно осуществляется, так как при $E < E_{0-}$ у функции $g(E)$ нет полюсов и она монотонна, так что

$$E_{0\alpha} \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow -\pi/2. \quad (12)$$

имеет место падение только основного состояния и лишь при $\alpha \rightarrow -\pi/2$. Если бы $\lim_{E \rightarrow -\infty} g(E) = \tilde{h} < 0$, то при $-\pi/2 < \alpha < \arctg \tilde{h}$ основное состояние было бы нечетным ($E = E_{0-}$) вопреки осцилляторной теореме.

Однако выбор расширения с $\alpha \rightarrow -\pi/2$ (само значение $\alpha = -\pi/2$ не приводит ни к какому самосопряженному расширению гамильтониана с сингулярностью потенциала (1)) физически неприемлем, так как при нем потенциал (1) сопровождается бесконечно-глубокой δ -ямой (5), разделяющей вещественную ось на две отдельные полупрямые ($x \leq 0$).

Так как вырождение уровней и падение на центр происходят при произвольном ($\lambda < 0$, $1 < \nu < 2$) сингулярном взаимодействии (1) ($\alpha \rightarrow -\pi/2$), то эти явления, конечно, не обуславливаются какой-либо повышенной симметрией гамильтониана, отсутствующей при $\nu \neq 1, 2$.

Все свойства основного состояния $E_{0\alpha}$ остаются в силе и для притягивающих четных потенциалов ($\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0$), возмущенных потенциалом (1). Имеется несколько потенциалов, для которых уравнение Шрёдингера можно решить точно и написать явно характеристическое уравнение (7) ($V(x) = 0$, $|x| \leq 1$, $V(x) = \infty$, $|x| > 1$; $V(x) = x^2 + s(s+1)x^{-2}$, $-1/2 < s < 1/2$ [4]). В кулоновском случае $\nu = 1$ (1) выбор четных функций $\Psi_+(x)$ требует более тщательного анализа, чем в [11]. Исходя из требований преобразования уровней энергии $E'_{n+} \rightarrow k^{-2} E_{n+}$ при изменении масштаба длины ($x' \rightarrow kx$), отсутствия связанных состояний в поле отталкивания ($\lambda > 0$) и появления их при включении

дополнительно к отталкиванию сколь угодно слабого потенциала притяжения $V_0(4)$, $h < 0$, получаем для функции $g(E)$ по методу [11] выражение

$$g(q) = -\lambda(\ln q - (2q)^{-1} - \psi(q) - \pi \operatorname{ctg} \pi q),$$

$$E = -\lambda^2(4q^2)^{-1}, \quad (13)$$

$\psi(q)$ — пси-функция. Четные уровни энергии одномерного атома водорода q_{n+} , $n=0, 1, 2, \dots$ определяются как корни уравнения (7), (13), $h=0$. Основное состояние конечно ($q_0=0,468$), возбужденные уровни чередуются с нечетными $n < q_{n+} < n+1$, $n=1, 2, \dots$ и асимптотически эквидистантны в шкале q ,

$$q_{n+} = n + 1/2, \quad n \gg 1. \quad (14)$$

Все свойства (8)–(12) функции $g(E)$ подтверждаются этими примерами. Из первого и разобранного примеров находится асимптотика функции $g(E)$ при $E \rightarrow -\infty$:

$$g(E) = -(-E)^{1/2}, \quad (15)$$

т. е. при $h \rightarrow -\infty$ ($\alpha \rightarrow -\pi/2$) основной уровень ведет себя так же, как и уровень энергии для потенциала $V_0(4)$ ($h < 0$) [12]: $E_0 = -(-h)^2$. Значит, падение основного уровня вызвано влиянием углубляющейся ($h \rightarrow -\infty$) δ -ямы: $V_0 = 2\lambda(v-1)^{-1}a^{1-v}\delta(x)$, $1 < v < 2$; $V_0 = -2\lambda \ln a \delta(x)$, $v=1$, —возникающей при обрезании потенциала притяжения (1) ($|x|^{-v} \rightarrow (|x|+a)^{-v}$, $a \rightarrow +0$), а не сингулярностью потенциала (1). Формула (15) может быть выведена строго для финитного потенциала путем его аппроксимации кусочно-постоянным. Отличие от (15) асимптотики $g(E)$ в случае $V=s(s+1)x^{-2}$ связано с модификацией V_0 [4] по сравнению с (4), (5).

Из изложенного следует, что при средней ($1 \leq v < 2$, $\lambda < 0$; $v=2$, $-1/4 < \lambda < 0$) сингулярности потенциала (1) в одномерном случае падения на центр нет. Оно может произойти только при неудачном выборе самосопряженного расширения гамильтониана $\alpha \rightarrow -\pi/2$, когда возникает бесконечно-глубокая δ -яма, вызывающая падение основного уровня. Настоящее падение счетного множества уровней наступает, как и в центральном поле, при сильной сингулярности ($v > 2$, $\lambda < 0$; $v=2$, $\lambda < -1/4$) для всех расширений гамильтониана (2). Однако в последнем случае сингулярная одномерная яма полностью непроницаема (как и барьер при $v > 2$, $\lambda > 0$; $v=2$, $\lambda \geq 3/4$) [13] и квантовая механика одномерного движения совпадает с таковой для центрального поля ($l=0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1974.
 [2] Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., 1971. Приложение А. [3] London R. // Amer. J. Phys. 1959. 27. P. 649. [4] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р. // ТМФ. 1986. 68. С. 45. [5] Dittrich J., Exner P. // J. Math. Phys. 1985. 26. P. 2000. [6] Давтян Л. С., Погосян Г. С., Сисакян А. Н., Тер-Антонян В. М. Препринт ОИЯИ. P-2-86-571. Дубна, 1986. [7] Миллер У. Симметрия и разделение переменных. М., 1986. С. 112. [8] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., 1982. Т. 4. С. 77. [9] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р. // ТМФ. 1987. 70. С. 384. [10] Ситенко А. Г. Теория рассеяния. Киев, 1975. С. 120. [11] Гостев В. Б., Гостев И. В., Френкин А. Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1987. 28, № 5. С. 77. [12] Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М., 1960. Т. 2. С. 595. [13] Гостев В. Б., Френкин А. Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1987. 28, № 3. С. 71.

Поступила в редакцию
13.04.87