

УДК 530.145

КВАНТОВЫЙ ПАРАДОКС ЗЕНОНА ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ С КОНЕЧНОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Ф. Я. Халили

(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

Показано, что при непрерывном слежении за двухуровневой системой межуровневые осцилляции подавляются тем сильнее, чем выше точность слежения. При абсолютно точном слежении система замораживается на начальном уровне.

Известно, что при непрерывном слежении за переменной с дискретным спектром (не являющейся интегралом движения) происходит подавление квантовых переходов между ее собственными состояниями. Это явление получило название квантового парадокса Зенона (см. работу [1] и библиографию к ней). Например, при непрерывном слежении за числом квантов в пробном осцилляторе уменьшается его чувствительность к внешней силе, так как флуктуации фазы, вызванные измерительным прибором (вследствие соотношения неопределенностей «число квантов — фаза»), нарушают когерентность действия силы на осциллятор [2, 3]. Полное подавление переходов происходит, очевидно, только при точном слежении. При слежении с конечной точностью эволюция системы некоторым образом модифицируется, но вероятности переходов остаются отличными от нуля.

В настоящей работе решена задача о воздействии процедуры приближенного слежения на динамику вероятностей переходов в двухуровневой системе. Поведение аналогичной системы в случае точного слежения анализировалось в работе [1].

Свободная эволюция рассматриваемой системы характеризуется осцилляциями между двумя ее уровнями. Обозначим состояния, соответствующие точной локализации на этих уровнях, через $|1\rangle$ и $|-1\rangle$. Тогда

$$\hat{U}(t)|1\rangle = \cos \frac{\Omega t}{2} |1\rangle + i \sin \frac{\Omega t}{2} |-1\rangle, \quad (1)$$

$$\hat{U}(t)|-1\rangle = i \sin \frac{\Omega t}{2} |1\rangle + \cos \frac{\Omega t}{2} |-1\rangle,$$

где $\hat{U}(t)$ — оператор эволюции. Параметр Ω равен частоте осцилляций вероятностей переходов:

$$|\langle 1 | \hat{U}(t) | -1 \rangle|^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos \Omega t). \quad (2)$$

Пусть I — единичная 2×2 -матрица, $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ — матрицы Паули. С их помощью оператор $\hat{U}(t)$ можно записать в виде

$$\hat{U}(t) = I \cos(\Omega t/2) + i \hat{\sigma}_x \sin(\Omega t/2). \quad (3)$$

Ему соответствует, как легко показать, гамильтониан

$$\hat{\mathcal{H}} = -(\hbar\Omega/2) \hat{\sigma}_x. \quad (4)$$

Типичным примером двухуровневой системы является частица со

спином $1/2$ в магнитном поле. Если ось x направлена вдоль вектора напряженности поля, а состояния $|1\rangle$ и $|-1\rangle$ представляют собой состояния с фиксированной проекцией спина на ось z , то гамильтониан спиновой степени свободы равен гамильтониану (4). Частота Ω в данном случае равна удвоенной частоте прецессии спина, $\Omega = 2\mu H/\hbar$ (H — напряженность магнитного поля, μ — магнитный момент частицы).

В качестве второго примера рассмотрим систему двух одинаковых осцилляторов, в которой находится один квант. Если осцилляторы связаны достаточно слабо, то гамильтониан можно записать в приближении вращающейся поляризации:

$$\mathcal{H} = \hbar\omega(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + 1) - \frac{\hbar\Omega}{2}(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1), \quad (5)$$

где $\hat{a}_{1,2}^\dagger, \hat{a}_{1,2}$ — операторы рождения и уничтожения квантов в первом и втором осцилляторах, ω — парциальная частота, Ω — константа связи, $\Omega \ll \omega$. Состояния, соответствующие локализации кванта в одном из осцилляторов, образуют базис в двумерном гильбертовом подпространстве, содержащем все состояния с одним квантом в системе. Гамильтониан (5) в этом базисе имеет вид 2×2 -матрицы:

$$\mathcal{H} = 2\hbar\omega\hat{I} - (\hbar\Omega/2)\hat{\sigma}_x.$$

Первое слагаемое здесь можно опустить, так как оно приводит лишь к появлению не несущего физического смысла фазового множителя $e^{-2i\omega t}$ в операторе эволюции. Второе же совпадает с гамильтонианом (4).

Стандартным способом описания процесса непрерывного слежения является его представление как предельного случая дискретной последовательности измерений, когда интервал между измерениями стремится к нулю, а ошибка каждого измерения — к бесконечности (см. [4, 5], а также обзор [6]). Каждое измерение дает некоторую оценку номера уровня j , на котором находится система ($j = \pm 1$). Вероятность получения результата j равна [7, 8]

$$\omega(j) = \text{Sp}(\hat{\Pi}(j)\hat{\rho}_{in}), \quad (6)$$

где $\hat{\rho}_{in}$ — оператор плотности состояния системы перед измерением,

$$\hat{\Pi}(1) + \hat{\Pi}(-1) = \hat{I} \quad (7)$$

— разложение единицы, описывающее данную измерительную процедуру.

Для задания конкретного вида разложения единицы (7), а также состояния системы после измерения требуется дополнительная информация об устройстве измерительного прибора. Мы будем рассматривать измерения, оставляющие неизменными собственные состояния измеряемой величины — невозмущающие измерения [9]. Они оказывают минимальное допустимое при заданной точности измерения обратное влияние на систему, определяемое соотношением

$$\hat{\rho}(j) = \frac{1}{\omega(j)} \hat{\Pi}^{1/2}(j) \hat{\rho}_{in} \hat{\Pi}^{1/2}(j), \quad (8)$$

где $\hat{\rho}(j)$ — оператор плотности состояния системы после измерения, $\hat{\Pi}^{1/2}(j)$ — диагональный в представлении измеряемой величины оператор, квадрат которого равен $\hat{\Pi}(j)$. Наложим на измерительную процедуру также естественное условие симметрии: потребуем, чтобы мат-

рица условных вероятностей результатов измерений была симметричной:

$$\langle 1 | \hat{\Pi}(1) | 1 \rangle = \langle -1 | \hat{\Pi}(-1) | -1 \rangle = (1 + \sin 2\varphi) / 2, \quad (9)$$

$$\langle 1 | \hat{\Pi}(-1) | 1 \rangle = \langle -1 | \hat{\Pi}(1) | -1 \rangle = (1 - \sin 2\varphi) / 2$$

(φ — параметр, определяющий точность измерения: $0 \leq \varphi \leq \pi/4$, значению $\varphi = \pi/4$ соответствует точное измерение, $\varphi = 0$ — случайное угадывание результата). Сказанное позволяет однозначно определить вид $\hat{\Pi}(j)$:

$$\hat{\Pi}(j) = \frac{1}{2} (\hat{I} + j\hat{\sigma}_z \sin 2\varphi), \quad (10)$$

$$\hat{\Pi}^{1/2}(j) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{I} \cos \varphi + j\hat{\sigma}_z \sin \varphi). \quad (11)$$

В последовательности измерений точность определения номера квантового уровня, достижимая за заданное время, определяется точностью каждого измерения и числом выполненных измерений, т. е. отношением параметров φ и θ , где θ — интервал времени между измерениями. При предельном переходе к непрерывному слежению точность определяется относительным темпом стремления φ и θ к нулю. Удобной мерой точности является величина

$$\tau_\varphi = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow 0}} \frac{\theta}{\varphi^2}. \quad (12)$$

Нетрудно показать, что если время усреднения τ достаточно мало, так что можно пренебречь вероятностями переходов за это время, то дисперсия линейной несмещенной оценки номера уровня равна

$$(\Delta j)^2 = \frac{\tau_\varphi}{4\tau}. \quad (13)$$

Таким образом, τ_φ равно времени, необходимому для достижения погрешности $\Delta j = 1/2$.

Из формул (6) и (8) следует, что если в системе было выполнено последовательно N измерений с интервалом θ , то вероятность перехода с уровня k на уровень l ($k, l = \pm 1$) за время $\tau = N\theta$ будет равна

$$p_\tau(k, l | j) = \frac{1}{w(j)} |\langle l | \hat{V}(j) | k \rangle|^2, \quad (14)$$

где $j = \{j_1, \dots, j_N\}$ — вектор результатов измерений,

$$V(j) = \hat{\Pi}^{1/2}(j_N) U(\theta) \dots \hat{\Pi}^{1/2}(j_1) U(\theta),$$

$$w(j) = \langle k | V(j) V(j) | k \rangle$$

— вероятность получения набора результатов измерений j . Вероятность (14) зависит не только от динамического поведения системы, но и от полученных результатов измерений. Предметом настоящей работы является анализ динамического воздействия измерителя на систему. Поэтому нас интересуют усредненные по всем возможным результатам измерений (априорные) вероятности

$$p_\tau(k, l) = \sum_j p_\tau(k, l | j) w(j) = \sum_j |\langle l | \hat{V}(j) | k \rangle|^2. \quad (15)$$

Предел выражения (15) при $\tau \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow 0$ (т. е. при непрерывном слежении) вычислен в Приложении. Он имеет вид

$$\begin{aligned} p_{\tau}(1, 1) &= p_{\tau}(-1, -1) = (1 + f(t))/2, \\ p_{\tau}(1, -1) &= p_{\tau}(-1, 1) = (1 - f(t))/2, \end{aligned} \quad (16)$$

где $f(t)$ — это решение уравнения

$$\ddot{f}(t) + (2/\tau_{\varphi})\dot{f}(t) + \Omega^2 f(t) = 0 \quad (17)$$

при начальных условиях $f(0) = 1$, $\dot{f}(0) = 0$.

Уравнение (17) совпадает с уравнением движения для гармонического осциллятора с затуханием. Роль времени релаксации в (17) играет величина, определяющая точность слежения, — τ_{φ} . Таким образом, процесс непрерывного слежения так же влияет на динамику вероятностей переходов, как вязкость на движение осциллятора.

Решение уравнения (17) хорошо известно. С учетом начальных условий оно имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} \left(\cos \Omega' t + \frac{1}{\Omega' t} \sin \Omega' t \right) e^{-t/\tau_{\varphi}} & \text{при } \Omega \tau_{\varphi} > 1, \\ \frac{1}{\tau_{-} - \tau_{+}} (\tau_{-} e^{-t/\tau_{-}} - \tau_{+} e^{-t/\tau_{+}}) & \text{при } \Omega \tau_{\varphi} < 1, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\Omega' = \sqrt{\Omega^2 - \tau_{\varphi}^{-2}}, \quad \tau_{\pm}^{-1} = \tau_{\varphi}^{-1} \pm \sqrt{\tau_{\varphi}^{-2} - \Omega^2}.$$

Как видно из формулы (18), при $t \rightarrow \infty$ $f(t) \rightarrow 0$. Это означает, что под действием измерительного прибора рассматриваемая система асимптотически стремится к равновесному состоянию, в котором вероятности локализации на обоих уровнях одинаковы. Если $\Omega \tau_{\varphi} > 1$, то этот процесс сопровождается осцилляциями вероятностей переходов, аналогичными тем, которые имеют место в свободной системе. При увеличении точности слежения частота осцилляций уменьшается, и при $\Omega \tau_{\varphi} < 1$ они полностью подавлены: вероятность локализации на начальном уровне стремится с течением времени к своему асимптотическому значению $1/2$, уменьшаясь монотонно.

В предельном случае высокой точности слежения ($\Omega \tau_{\varphi} \ll 1$) функцию $f(t)$ для не слишком малых значений ее аргумента можно аппроксимировать экспонентой

$$f(t) = e^{-t/\tau}, \quad (19)$$

где

$$\tau = \frac{2}{\Omega^2 \tau_{\varphi}} \quad (20)$$

— время жизни системы на начальном уровне.

Таким образом, измерительный прибор существенно изменяет поведение системы, если определяющий точность слежения параметр τ_{φ} меньше характерного времени свободной эволюции Ω^{-1} . Если это условие выполнено, то время жизни системы на начальном уровне обратно пропорционально τ_{φ} . При $\tau_{\varphi} \rightarrow 0$, т. е. при точном слежении, система замораживается на начальном уровне и перестает эволюционировать.

Приложение. Пусть $S(\rho)$ — супероператор, описывающий изменение состояния исследуемой системы в результате свободной эволюции в течение времени θ и последующего однократного измерения:

$$S(\hat{\rho}) = \sum_{l=\pm 1} \hat{\Pi}^{1/2}(l) \hat{U}(\theta) \hat{\rho} \hat{U}^{\dagger}(\theta) \hat{\Pi}^{1/2}(l). \quad (\text{П.1})$$

Используя формулы (3) и (9), можно показать, что

$$S(A\hat{I} + B\hat{\sigma}_y + C\hat{\sigma}_z) = A\hat{I} + (B \cos \Omega\theta - C \sin \Omega\theta) \cos 2\varphi \hat{\sigma}_y + (C \cos \Omega\theta + B \sin \Omega\theta) \hat{\sigma}_z. \quad (\text{П.2})$$

Из этого соотношения и тождества

$$|k\rangle \langle k| = \frac{1}{2} (\hat{I} + k \hat{\sigma}_z)$$

($k=\pm 1$) следует, что результат n -кратного действия супероператора (П.1) на состояние $|k\rangle \langle k|$ можно представить в виде

$$S^n(|k\rangle \langle k|) = \frac{\hat{I}}{2} + \frac{k}{2} (G_n \hat{\sigma}_y + F_n \hat{\sigma}_z), \quad (\text{П.3})$$

где коэффициенты G_n и F_n определяются из соотношений

$$G_{n+1} = (G_n \cos \Omega\theta - F_n \sin \Omega\theta) \cos 2\varphi, \quad (\text{П.4})$$

$$F_{n+1} = F_n \cos \Omega\theta + G_n \sin \Omega\theta,$$

$$G_0 = 0, F_0 = 1. \quad (\text{П.5})$$

Следовательно, вероятность перехода (15) равна

$$p_{\tau}(k, l) = \langle l | S^N(|k\rangle \langle k|) | l \rangle = \frac{1}{2} (1 + kl F_N). \quad (\text{П.6})$$

Для предельного перехода к непрерывному слежению введем функции $g(t)$, $f(t)$, значения которых в точках $t=n\theta$ равны G_n и F_n соответственно. При $\theta \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow 0$

$$G_{n+1} \rightarrow g(n\theta) + \theta \dot{g}(n\theta),$$

$$F_{n+1} \rightarrow f(n\theta) + \theta \dot{f}(n\theta), \quad (\text{П.7})$$

$$\cos 2\varphi \rightarrow 1 - 2\varphi^2.$$

Подстановка (2.7) в (2.4) дает уравнения для $g(t)$, $f(t)$:

$$\dot{g}(t) = -\frac{2}{\tau_{\varphi}} g(t) - \Omega f(t),$$

$$\dot{f}(t) = \Omega g(t), \quad (\text{П.8})$$

которые можно свести к одному — уравнению (17). Начальные условия для него определяются из соотношений (П.5). Формула (16) для вероятности перехода является непосредственным следствием соотношения (П.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Singh I., Whitaker M. A. B. // Amer. J. Phys. 1982. N 12. P. 882. [2] Zurek W. H. Preprint OAP-651, Californ. Techn. Inst., 1982. [3] Халили Ф. Я. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1986. 27, № 2. С. 19. [4] Менский М. Б. Группа путей. Измерения. Поля. Частицы. М., 1983. [5] Халили Ф. Я. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1980. 21, № 1. С. 37. [6] Saves C. M. Preprint GRP-073, Californ. Techn. Inst., 1986. [7] Хелстром К. Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. М., 1979. [8] Холево А. С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М., 1980. [9] Braginsky V. B., Vorontsov Yu. I., Thorne K. S. // Science. 1980. 209. P. 547.

Поступила в редакцию
17.04.87