$$\alpha_1(\xi) = \int\limits_{\eta(\nu, A_2, A_1)} n_0(\mu)\, d\mu, \text{ где } \eta(\nu, A_2, A_1) = \frac{(\Sigma^{-1/2}\nu,\ \Sigma^{-1/2}(A_2 - A_1) f)}{\|\Sigma^{-1/2}(A_2 - A_1) f\|}.$$

Здесь $n_0(\mu)$ — плотность одномерного распределения $\mathcal{N}(0, 1)$. Если верна H_2, то надежность равна

$$\alpha_2(\xi) = \int\limits_{\eta'}^{\infty} n_0(\mu)\, d\mu, \text{ где } \eta' = \eta(\nu, A_2, A_1) + \|\Sigma^{-1/2}(A_2 - A_1) f\|.$$

Поскольку при любых A_2 и A_1 $\eta(\nu, A_2, A_1)$ распределены одинаково, то при фиксированной надежности $\alpha_1(\xi)$ надежность $\alpha_2(\xi)$ минимальна, если максимальна величина $\|\Sigma^{-1/2}(A_2 - A_1) f\|$. Таким образом, $f = f_0$ является таким тестовым сигналом, который позволяет различать $[A_1, \Sigma]$ и $[A_2, \Sigma]$ по надежности в указанном выше смысле оптимальным образом.

В заключение отметим, что если модель выбрана в соответствии с измерением, то расчет погрешности редукции становится весьма сложным, поскольку в этом случае модель является случайной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П. // Матем. сб. 1982. **118(160)**, № 1. С. 19. [2] Пытьев Ю. П.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1986. **27**, № 3. С. 14. [3] Боровков А. А. Математическая статистика. М., 1984.

Поступила в редакцию
23.04.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 5

УДК 514.7

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОВАРИАНТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ БИЛОКАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

А. Я. Родионов, А. Ю. Таранов

(НИИЯФ)

Получены рекуррентные соотношения для кратных ковариантных производных билокальных функций на римановом многообразии. Рассмотрены, в частности, геодезический интервал и оператор параллельного переноса; вычислены производные детерминанта Ван Флека до 5-го порядка включительно.

Введение. Ковариантная трактовка теории поля в тех случаях, когда приходится иметь дело с неплоскими римановыми многообразиями либо в качестве координатного пространства (теория на фоне нетривиальной метрики), либо в качестве конфигурационного (например, обобщенная σ-модель), является весьма желательной. При исследовании в ковариантном формализме билокальных величин, таких как функции Грина или вариации действия [1—4], появляется необходимость учитывать в той или иной мере глобальные свойства соответствующего многообразия. Влияние глобальной геометрии на билокальные объекты, аргументы которых разнесены не очень далеко, можно попытаться учесть приближенно. В качестве примера такого подхода можно привести вычисление расходящихся частей диаграмм в методе фонового поля (см., напр., [1—3]).

В настоящей работе приведены рекуррентные формулы для крат-

ных ковариантных производных в пределе совпадающих аргументов для геодезического интервала $S(x, x')$, детерминанта Ван Флека $\Delta(x, x')$ и оператора параллельного переноса вдоль геодезической, соединяющей x и x' — $a_0(x, x')$. Вычисление этих величин, весьма простое в принципиальном отношении, с ростом числа производных чрезвычайно усложняется [4, 5]. Отметим, что для полностью симметризованных кратных ковариантных производных, входящих в тейлоровские разложения двухточечных функций, аналогичные формулы либо известны [6], либо достаточно очевидны (см. далее). Однако при вычислении коэффициентов высокотемпературного разложения теплового ядра [7] и при вычислении фейнмановских диаграмм в конфигурационном пространстве [3] полностью симметризованных производных не достаточно.

Мы систематически используем нижние индексы у тензоров. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование с неявным метрическим тензором с верхними индексами. Тензоры Римана, Риччи и форма кривизны связности векторного расслоения определены следующим образом:

$$[\nabla_i, \nabla_j] f_k = R_{lkij} f_l + F_{ij} f_k, \quad R_{ikil} = R_{kl}.$$

Некоторые двухточечные функции на римановом многообразии. Пусть x, x' — точки риманова многообразия (M, g), достаточно близкие для того, чтобы существовала единственная геодезическая, соединяющая их. Если $d(x, x')$ — длина этой геодезической, то $S(x, x')$ — геодезический интервал — определяется как $S(x, x') = \frac{1}{2} d^2(x, x')$.

Хорошо известно [7, 8], что $S(x, x')$ — гладкая функция. Если M связно и геодезически полно, то функция $S(x, x')$ определена на $M \times M$.

С геодезическим интервалом связана другая двухточечная функция — $\Delta(x, x')$ — детерминант Ван Флека [8], определенный следующим образом:

$$\Delta(x, x') = g^{-1/2}(x)\, g^{-1/2}(x') \det\left(\frac{\partial^2 S(x, x')}{\partial x_i\, \partial x'_j}\right),$$

где $g(x) = \det(g_{ij}(x))$. С точностью до множителей $g^{1/2}(x)$, $g^{1/2}(x')$, превращающих $\Delta(x, x')$ в бискаляр, $\Delta(x, x')$ является якобианом перехода от локальных координат x_i' в окрестности точки x к нормальным координатам $S_i = \partial_i^{x'} S(x, x')$ в той же окрестности. Отметим также, что $\Delta(x, x')$ с точностью до локальных множителей совпадает с билокальной функцией μ_n [6].

Если, кроме того, многообразие M является базой некоторого расслоения со связностью, то любой кривой в M соответствует оператор параллельного переноса в слое [9]. Обозначим через $\hat{a}_0(x, x')$ оператор параллельного переноса вдоль геодезической, соединяющей точки x и x'. Если точка $m_{x'}$ принадлежит слою над точкой x', то $\widehat{a}_0(x, x') \cdot m'_x$ — точка из слоя над x, полученная в результате параллельного переноса $m_{x'}$ вдоль геодезической, соединяющей x и x'. Здесь «$\cdot$» обозначает соответствующее действие структурной группы расслоения в слое.

Непосредственно из определений следует, что $S(x, x')$ и $\Delta(x, x')$ — симметричные функции своих аргументов (что позволяет пользоваться рекуррентной формулой работы [6] для вычисления их симметризованных кратных производных нечетного порядка при $x' = x$). Оператор

же $\hat{a}_0(x, x')$ обладает очевидным свойством: $\hat{a}_0^{-1}(x, x') = \hat{a}_0(x', x)$. Непосредственно из определений же выводятся дифференциальные уравнения и граничные условия, решения которых задают функции S, $\Delta^{1/2}$, $\hat{a}_0$. (В практические расчеты почти всегда входит именно $\Delta^{1/2}$ [1—3].) Эти уравнения таковы:

$$2S(x, x') = \nabla_i^x S(x, x') \nabla_i^x S(x, x'),$$

$$S(x, x) = 0, \quad \nabla_i^x S(x, x')|_{x=x'} = 0, \quad \det \nabla_i^x \nabla_j^x S(x, x')|_{x=x'} \neq 0; \tag{1}$$

$$\Delta^{1/2}(x, x') \nabla_i^x \nabla_i^x S(x, x') + 2\nabla_i^x S(x, x') \nabla_i^x \Delta^{1/2}(x, x') = d\Delta^{1/2}(x, x'), \tag{2}$$

$$\Delta^{1/2}(x, x) = 1; \quad d \text{ — размерность } M,$$

$$\nabla_i^x S(x, x') \nabla_i^x \hat{a}_0(x, x') = 0, \quad \hat{a}_0(x, x) = \hat{1}. \tag{3}$$

Комбинаторные леммы. Все дальнейшее рассмотрение будет базироваться на двух комбинаторных леммах, которые мы сформулируем здесь без доказательств. Для удобства записи введем следующие обозначения. Пусть $T(x, x')$ — скалярная двухточечная функция. Положим

$$\nabla_{i_n}^x \ldots \nabla_{i_1}^x T(x, x') = (i_n \ldots i_1)_T, \quad (i_n \ldots i_1)_T|_{x=x'} = [i_n \ldots i_1]_T.$$

Положим также

$$\nabla_{j_1} \ldots \nabla_{j_n} F_{i_1 \ldots i_t}(x) = \nabla F(j_1 \ldots j_n, i_1 \ldots i_t),$$

$$\sum_{l=0}^{n} \nabla_{j_1} \ldots \nabla_{j_{l-1}} \nabla_{i_1} \nabla_{j_{l+1}} \ldots \nabla_{j_n} F_{j_1 i_1 \ldots i_t} = \nabla F^S(j_1 \ldots i_t),$$

где $j_0 = i_1$, а $F_{i_1 \ldots i_t}(x)$ — некоторый локальный тензор.

Пусть $L = (k_n \ldots k_1)$ — последовательность упорядоченных индексов, при этом $k_r > k_{r-1}$ (знак $>$ означает отношение порядка на множестве индексов). Определим подмножество группы S_n перестановок последовательности L: $K_t(L) = \{\sigma \in S_n : \sigma(i+1) > \sigma(i)$ при $i > t$ или $i < t\}$.

Лемма 1. Пусть $L = (i_n \ldots i_1)$ — последовательность упорядоченных индексов, f, g — две произвольные функции. Тогда

$$\nabla fg(i_n \ldots i_1) = \sum_{p=0, \sigma \in K_p(L)}^{n} \nabla f(\sigma(n) \ldots \sigma(p+1)) \nabla g(\sigma(p) \ldots \sigma(1)).$$

Лемма 2. Пусть L — последовательность упорядоченных индексов из леммы 1, f — некоторое локальное сечение векторного расслоения над многообразием M. Тогда

$$\sum_{t=1}^{n} \nabla f(i_n \ldots i_{t+1} i_{t-1} \ldots i_1 i_t) = n \nabla f(i_n \ldots i_1) +$$

$$+ \sum_{t=3, \sigma \in K_t(L)}^{n-3} \nabla R^S(\sigma(n) \ldots \sigma(t+1) i) \nabla f(\sigma(t) \ldots \sigma(1); i_{\sigma(t+1)}) -$$

$$- \sum_{t=2, \sigma \in K_t(L)}^{n-2} \nabla \hat{F}(\sigma(n) \ldots \sigma(t+1)) \nabla f(\sigma(t) \ldots \sigma(1)).$$

Здесь введено новое обозначение

$$(\sigma(t)\ldots\sigma(1);\ i_{\sigma(t+1)})=(\sigma(t)\ldots\sigma(k)i\sigma(k-1)\ldots\sigma(1)),$$

где $\sigma(k)>\sigma(t+1)>\sigma(k-1)$.

Рекуррентные соотношения. В этом разделе мы приведем рекуррентные соотношения для ковариантных производных при совпадающих аргументах геодезического интервала S, детерминанта Ван Флека $\Delta^{1/2}$ и оператора параллельного переноса вдоль геодезической $\hat{a}_0$. Рекуррентное соотношение для $[i_n\ldots i_1]_S$ выводится следующим образом. После n-кратного ковариантного дифференцирования уравнения (1) получаем

$$2(i_n\ldots i_1)_S=\sum_{p=0}^{n}(\sigma(n)\ldots\sigma(p+1)i)_S(\sigma(p)\ldots\sigma(1)i)_S.$$

Переходя к пределу $x\to x'$, учитывая начальные условия (1)—(3), а также равенство $[ij]_S=g_{ij}$, получаем

$$2[i_n\ldots i_1]_S-2\sum_{k=1}^{n}[i_n\ldots i_{k+1}i_{k-1}\ldots i_1i_k]_S=$$

$$=\sum_{p=2,\sigma\in K_p(L)}[\sigma(n)\ldots\sigma(p+1)i]_S[\sigma(p)\ldots\sigma(1)i]_S.$$

Применяя к левой части этого равенства лемму 2, получаем

$$[i_n\ldots i_1]_S=\frac{1}{1-n}\sum_{k_2>k_1}\nabla R(i_n\ldots\widehat{i_{k_2}}\ldots\widehat{i_{k_1}}\ldots i_{k_2}i_2i_1i_{k_1})+$$

$$+\sum_{p=3,\sigma\in K_p(L)}^{\max(n-3,2)}\Big(\nabla R^S(\sigma(n)\ldots\sigma(p+1)i)[\sigma(p)\ldots\sigma(1);\ i_{\sigma(p+1)}]_S+$$

$$+\frac{1}{2}[\sigma(n)\ldots\sigma(p+1)i]_S[\sigma(p)\ldots\sigma(1)i]_S\Big).\qquad(4)$$

Здесь мы еще раз использовали равенство $[ij]_S=g_{ij}$, а также $[ijk]_S=0$. Шляпка над индексом означает, что он пропущен, а $T(\ldots\{ij\}\ldots)=T(\ldots ij\ldots)+T(\ldots ji\ldots)$.

Аналогично получаются и рекуррентные соотношения для $\Delta^{1/2}$ и $\hat{a}_0$:

$$[i_n\ldots i_1]_{\Delta^{1/2}}=-\frac{1}{n}\sum_{p=1,\sigma\in K_p(L)}^{n-3}[\sigma(n)\ldots\sigma(p+1)i]_S[\sigma(p)\ldots\sigma(1)i]_{\Delta^{1/2}}+$$

$$+\left(\frac{-1}{2n}\right)\sum_{p=1,\sigma\in K_p(L)}^{n-2}[\sigma(n)\ldots\sigma(p+1)ii]_S[\sigma(p)\ldots\sigma(1)]_{\Delta^{1/2}}+$$

$$+\left(-\frac{1}{2n}\right)\sum_{p=0,\sigma\in K_p(L)}^{n-3}\nabla R^S(\sigma(n)\ldots\sigma(p+1)i)\times$$

$$\times[\sigma(p)\ldots\sigma(1);\ i_{\sigma(p+1)}]_{\Delta^{1/2}}.\qquad(5)$$

$$[i_n \ldots i_1]_{\widehat{a}_0} = \frac{1}{n} \sum_{p=0, \sigma \in K_p(L)}^{n-2} \nabla F^S(\sigma(n) \ldots \sigma(p+1)) [\sigma(p) \ldots \sigma(1)]_{\widehat{a}_0} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{n}\right) \sum_{p=0, \sigma \in K_p(L)}^{n-3} ([\sigma(n) \ldots \sigma(p+1) i]_S [\sigma(p) \ldots \sigma(1);\ i_{\sigma(p+1)}]_{\widehat{a}_0} +$$

$$+ \nabla R^S(\sigma(n) \ldots \sigma(p+1) i) [\sigma(p) \ldots \sigma(1);\ i_{\sigma(p+1)}]_{\widehat{a}_0}). \qquad (6)$$

С помощью этих формул были получены выражения для производных S до восьмого порядка и для $\Delta^{1/2}$ — до пятого (см. далее). Отметим, что в случае плоского пространства рекуррентное соотношение можно разрешить в явном виде, так как в этом случае $\hat{a}_0$ выражается через P-экспоненту от формы связности.

Некоторые применения. Величины $[i_n \ldots i_1]_S$ для $n=7,8$ были вычислены в работе [5], где было отмечено, что формула (4) позволяет также представить результат в относительно компактном виде. В настоящем разделе мы приведем результаты вычислений $[i_n \ldots i_1]_{\Delta^{1/2}}$ для $n=4,5$. Как следует из формулы (5), для этого необходимы производные $S(x, x')$ соответственно 6-го и 7-го порядков. Использование для этих производных представлений, описанных в [5], делает вычисление $[i_4 \ldots i_1]_{\Delta^{1/2}}$ относительно несложным. В результате получаем

$$[i_4 i_3 i_2 i_1]_{\Delta^{1/2}} = \sum_{i=1, \sigma \in K_s(L)}^{4} C_i T_i(\sigma(4) \ldots \sigma(1)) +$$

$$+ \sum_{i=5, \sigma \in K_s(L)}^{6} C_i T_i(\sigma(4) \ldots \sigma(1)). \qquad (7)$$

Здесь $C_1 = -1/20$, $C_2 = 1/72$, $C_3 = -1/360$, $C_4 = 1/90$, $C_5 = 1/18$, $C_6 = 1/180$; тензоры T_i определяются следующим образом:

$$T_1(ijkp) = RC(ijkp),$$

$$T_2(ijkp) = RC(ij) RC(kp),$$

$$T_3(ijkp) = R(ijlq) R(kplq),$$

$$T_4(ijkp) = R(iljq) R(kplq),$$

$$T_5(ijkp) = R(ijkl) RC(pl),$$

$$T_6(ijkp) = R(ikjl) RC(p, l),$$

где $RC(ij) = R_{ij}$ — тензор Риччи.

Суммирование по классам $K_p(L)$ приводит к сокращению числа явных тензорных структур в (7) с 22 до 6. Как мы увидим на примере производной 5-го порядка, преимущества суммирования по классам перестановок индексов $K_p(L)$ еще более существенны.

Вычисления $[i_5 \ldots i_1]_{\Delta^{1/2}}$ могут быть выполнены вручную. Для контроля эти же вычисления были проделаны с помощью системы аналитических вычислений REDUCE [10] с привлечением дополнительного пакета для работы с некоммутирующими переменными [11]. Метод вычислений полностью совпадает с изложенным в [5]. Результат выглядит следующим образом:

$$[i_5 \ldots i_1]_{\Delta^{1/2}} = \sum_{\sigma \in K_2(i_5 \ldots i_1)} \Big(\frac{1}{72} (\nabla RC(\sigma(5)\sigma(4)\sigma(3)) +$$

$$+ \nabla RC(\sigma(4)\sigma(5)\sigma(3)) + \nabla RC(\sigma(3)\sigma(5)\sigma(4)) \Big) RC(\sigma(2)\sigma(1)) +$$

$$+ \Big(-\frac{1}{30} \Big) \nabla RC(\sigma(5)\sigma(4) \ldots \sigma(1)) + \frac{1}{60} R(\sigma(5)\{\sigma(4)\sigma(3)\} i) \times$$

$$\times \nabla RC(i\sigma(2)\sigma(1)) + \nabla RC(\{\sigma(2)\sigma(1)\} i) \Big(\frac{1}{36} R(\sigma(5)\sigma(4)\sigma(3) i) -$$

$$- \frac{1}{180} R(\sigma(5)\sigma(3)\sigma(4) i) \Big) + \Big(-\frac{1}{180} \nabla R(\sigma(4)\sigma(5)\sigma(3) ij) \times$$

$$\times R(\sigma(2)\sigma(1) ij) + \Big(\frac{1}{90} \Big) (\nabla R(\sigma(5)\sigma(4) i\sigma(3) j) +$$

$$+ \nabla R(\sigma(4)\sigma(5) i\sigma(3) j) + \nabla R(\sigma(3)\sigma(5) i\sigma(4) j)) R(\sigma(2) i\sigma(1) j) \Big) +$$

$$+ \sum_{\sigma \in K_1(i_5 \ldots i_1)} \Big(\frac{2}{45} \nabla R(\sigma(5)\sigma(4)\sigma(3)\sigma(2) i) +$$

$$+ \frac{1}{180} \nabla R(\{\sigma(5)\sigma(4)\}\sigma(2)\sigma(3) i) + \frac{7}{180} \nabla_R(\sigma(4)\sigma(5)\sigma(3)\sigma(2) i) +$$

$$+ \frac{1}{180} \nabla R(\sigma(3)\sigma(5)\sigma(2)\sigma(4) i) \Big) RC(\sigma(1) i).$$

В случае, когда индексы дифференцирования попарно свернуты, результат сильно упрощается (см., напр., [12], где приводится выражение для $[iijjkk]_{\Delta^{1/2}}$).

Рекуррентные соотношения (4)—(6) позволяют достаточно легко получать рекуррентные соотношения для кратных производных, сгруппированных в лапласианы, а также для кратных производных, разбитых на две группы, внутри которых производные симметризованы — такие объекты возникают при переходе к геодезическим координатам в фейнмановских амплитудах, вычисляемых в искривленном конфигурационном пространстве (см., напр., [3]). Мы надеемся, что развитие техники, изложенной в настоящей работе и работе [5], позволит преодолеть вычислительные трудности теории возмущений в искривленном пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Luscher M.//Ann. Phys. 1982. **142**. P. 359. [2] Jack I., Osborn H.//Nucl. Phys. 1984. **B234**. P. 331. [3] Barvinsky A. O., Vilkovisky G. A.//Phys. Rep. 1985. **119**. P. 1. [4] Christensen S. M.//Phys. Rev. 1976. **D14**. P. 2490. [5] Rodionov A. Ya., Taranov A. Yu.//Preprint IHEP 86-86. Serpukhov, 1986. [6] Kowalski O., Vanhecke L.//Ann. Global Anal. Geom. 1985. **3**. P. 95. [7] De Witt B. S. Dynamical theory of groups and fields. N. Y.-Ln., 1965. [8] Shoquet-Bruhat Y., De Witt-Morett C., Dillard-Bleik M. Analisis, manifolds and physics. North-Holland, 1977. [9] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1. [10] Hearn A. REDUCE user's manual. UCP-19. Utagh Univ. Preprint. USA, 1973. [11] Родионов А. Я. Тр. Междунар. совещ. по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Д11-83-516. Дубна, 1983. С. 187. [12] Kodiara J.//Phys. Rev. 1986. **D33**. P. 2882.

Поступила в редакцию
20.04.87