АСТРОНОМИЯ

УДК 521.13

ДВИЖЕНИЕ АСТЕРОИДОВ ВБЛИЗИ СОИЗМЕРИМОСТИ 2:1. СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ДАННЫМИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

И. А. Герасимов

(ГАИШ)

Результаты проведенного ранее качественного анализа движения астероидов вблизи соизмеримости 2:1 с Юпитером сравниваются с данными численного интегрирования уравнений плоского варианта круговой ограниченной задачи трех тел.

1. Основные соотношения. В плоской круговой ограниченной задаче трех тел для случая соизмеримости средних движений астероида и Юпитера 2 : 1 использование метода Цейпеля позволяет с точностью до величин первого порядка относительно массы Юпитера μ (при условии, что масса Солнца принята за единицу) представить канонические элементы

$$x_1=L-G,\quad y_1=M+\omega-M',\quad x_2=2L-G,\quad \bar{y}_2=s \tag{1}$$

в виде

$$x_1=\bar{x}_1+\frac{\partial S_1}{\partial y_1},\quad y_1=\bar{y}_1-\frac{\partial S_1}{\partial x_1},\quad x_2=\bar{x}_2+\frac{\partial S_1}{\partial y_2},\quad y_2=\bar{y}_2-\frac{\partial S_1}{\partial x_2}. \tag{2}$$

Здесь первые слагаемые описывают вековые и долгопериодические изменения элементов орбиты малой планеты, а вторые содержат короткопериодические возмущения [1]. При отбрасывании в возмущающей функции членов с e^2 и выше функция S_1 будет определяться выражением [1]

$$S_1=\frac{\mu}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}' \{A_j\sin jy_1+eB_j\sin[(j-2)y_1+y_2]\}, \tag{3}$$

в котором

$$A_j=\frac{L_{1/2}^{(j)}(\gamma)}{j(n'-n)},\quad B_j=-\frac{1}{jn'-(j-1)n}\left(\gamma\frac{d}{d\gamma}+2j\right)L_{1/2}^{(j)}(\gamma),$$

$L_{1/2}^{(j)}$ — коэффициенты Лапласа, n и n' — средние движения астероида и Юпитера, штрих у знака суммы означает, что при суммировании слагаемые со значками $j=0$, 2 пропускаются. Наконец,

$$\gamma=a\left(2-\sqrt{1-e^2}\right)^2 \tag{4}$$

— первый интеграл уравнений, описывающих вековые и долгопериодические изменения орбиты.

В выражениях (1) через L и G обозначены элементы Делоне, $s=M-2(M'-\omega)$ — аномалия Делоне. Для кеплеровских элементов орбиты астероида примем обычные обозначения, а элементы Юпитера будем отличать штрихом. Возьмем систему единиц, в которой гравитационная постоянная равна единице и Юпитер движется по окружности единичного радиуса.

Нетрудно заметить, что канонические элементы (1) связаны с элементами, использованными в работе [2], так же, как первая система канонических элементов Пуанкаре связана со второй. В упомянутой работе нами был проведен анализ эволюции астероидных орбит для резонансов первого порядка (2 : 1, 3 : 2, 4 : 3). В вековой части возмущающей функции были сохранены члены до e^2, в резонансной — член, пропорциональный $e \cos s$. Поскольку качественное поведение фазовых траекторий для этих резонансов однотипно, то оценку величины короткопериодических возмущений и сравнение с данными численного интегрирования точных уравнений мы провели только для одного из них — 2 : 1. Подчеркнем, что под сравнением мы будем понимать сравнение не численное, а качественное, ибо мы сравниваем, вообще говоря, разные задачи: одной отвечают точные уравнения, а для другой уравнения изменены целым рядом упрощающих предположений (учет величин только первого порядка по μ, отбрасывание короткопериодических слагаемых, сохранение только первых членов из бесконечного ряда, содержащего вековые и долгопериодические члены возмущающей функции).

2. **Оценка величины короткопериодических возмущений.** При помощи соотношений (2) нетрудно получить выражения для короткопериодических возмущений кеплеровых переменных, которые мы обозначим значком δ, поставленным перед соответствующим элементом. Тогда указанные возмущения будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\delta a &= \beta_1 \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_1} + \frac{\partial S_1}{\partial y_2} \right), \\
\delta e &= \beta_3 \frac{\partial S_1}{\partial y_2} - \beta_2 \frac{\partial S_1}{\partial y_1}, \\
\delta \omega &= (\beta_2 - \beta_3) \frac{\partial S_1}{\partial x_2}, \\
\delta M &= -\beta_1 \frac{\partial S_1}{\partial x_1} + (\beta_3 - 2\beta_2) \frac{\partial S_1}{\partial x_2},
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\beta_1 = 2\sqrt{a}, \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}} \left(1 - \sqrt{1-e^2}\right), \quad \beta_3 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}} \left(\sqrt{1-e^2} - 2\right).$$

В работе [3] при помощи функций Вейерштрасса строились фазовые траектории для $\gamma = 0{,}63$ и $0{,}65$ и различных начальных значений эксцентриситета при условии, что начальные значения $s = 0$ либо π, а $y_1 = 0$. Оценим величину выражений (5) для этих начальных условий. Нетрудно заметить, что здесь $\delta\omega = \delta M = 0$. Величины δa и δe для разных e_0 и $\gamma = 0{,}65$ приведены в табл. 1. При вычислениях в S_1 учитывались

Таблица 1

Значения короткопериодических возмущений в случае $\gamma = 0{,}65$, $M_0' = \omega_0 = 0$

e_0	$\delta e \cdot 10^3$		$\delta a \cdot 10^2$	
	$M = 0$	$M = \pi$	$M = 0$	$M = \pi$
0,05	0,782	—0,891	0,333	—0,135
0,10	0,685	—0,859	0,416	—0,149
0,15	0,554	—0,822	0,498	—0,163
0,20	0,388	—0,777	0,578	—0,176
0,25	0,187	—0,727	0,654	—0,188

члены, для которых $|j|\leqslant 10$. Величина μ здесь и далее полагалась равной 1/1047,39.

3. **Сравнение с данными численного интегрирования.** Поскольку поставленной нами целью является получение правильной качественной картины эволюции орбит астероидов, движущихся вблизи резонансов, то, учитывая малость величины короткопериодических возмущений, мы проводили сравнение без их учета. Используя метод интегрирования Рунге—Кутта с постоянным шагом, выбор которого изложен в работе [4], мы поступали следующим образом: для значений $\gamma=0{,}63$ и 0,65, изменяя начальное значение эксцентриситета e_0, определяли соответствующее начальное значение большой полуоси из выражения (4). Кроме того, $M_0'=\omega_0=0$, а M_0 бралось равным 0 либо π. Интегрирование проводилось на интервале времени порядка 100 оборотов Юпитера. Результаты представлены на рис. 1 и 2 в координатах $p=e\cos s$, $q=e\sin s$ для значений $\gamma=0{,}63$ (рис. 1) и 0,65 (рис. 2). В верхней части рисунков помещены траектории, полученные в результате численного

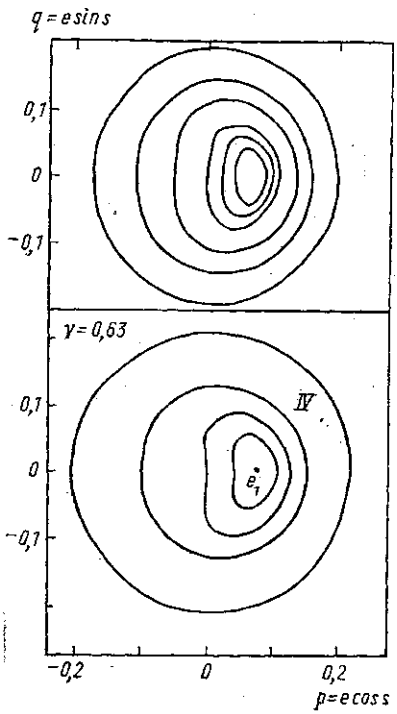

Рис. 1

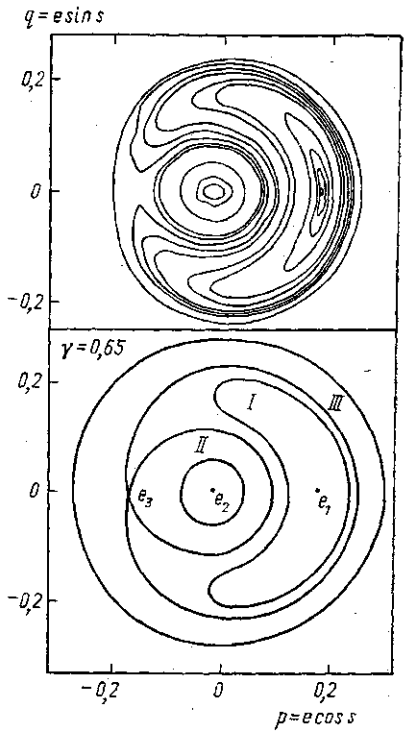

Рис. 2

интегрирования, в нижней — результаты качественного анализа. Римскими цифрами обозначены типы фазовых траекторий согласно введенной нами классификации [2]. Обозначения e_1, e_2 и e_3 относятся к стационарным решениям, о которых пойдет речь дальше. Сходство фазовых картин в обоих случаях может служить, на наш взгляд, подтверждением верности проведенного качественного анализа.

На рис. 3 сплошной кривой изображена максимальная величина возмущений эксцентриситета в зависимости от начального значения $p_0=e_0\cos s_0$, как это следует из аналитического рассмотрения задачи

[3]. Разности максимальных и минимальных значений e, отвечающие траекториям, полученным численным интегрированием и изображенным на рис. 1 и 2, обозначены точками.

4. **Стационарные решения.** В данной задаче существуют три типа стационарных решений: e_1, e_2 и e_3 [2]. Орбиты, отвечающие этим реше-

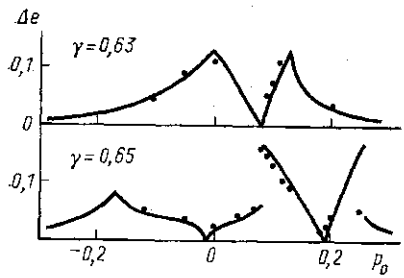

Рис. 3

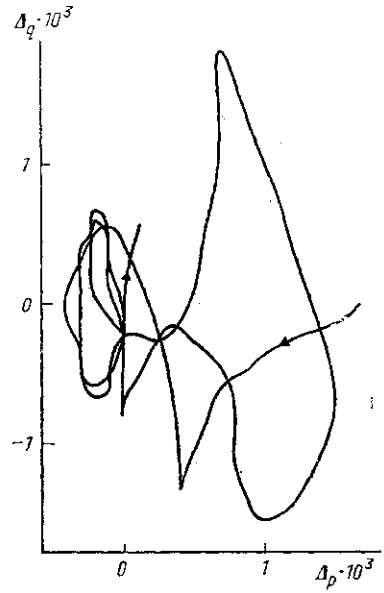

Рис. 4

ниям, имеют постоянный эксцентриситет и большую полуось. Аномалия Делоне s равна нулю для решения e_1 и равна π для остальных. В наших предыдущих работах мы учитывали при вычислении эксцентриситета стационарных орбит члены до e^2 в вековой части возмущающей функции и резонансные члены, пропорциональные e. Естественно встает вопрос о том, как влияет максимальная величина степени эксцентриситета N, до которой учитываются члены вековой и резонансной части возмущающей функции, на точность определения стационарного решения. Воспользовавшись результатами работ [5] и [6], в которых данные решения разыскивались при $N=2$ и 7 соответственно, мы свели данные, полученные для $\gamma=0{,}64$, в табл. 2. Из нее следует, что при

Таблица 2

Величина эксцентриситета стационарных орбит при постоянной $\gamma = 0{,}64$

N	e_1	e_2	e_3	Источник
1; 2	0,1405	0,0334	0,1070	[2]
2	0,1356	0,0380	0,0976	[5]
7	0,1357	0,0380	0,0981	[6]

переходе от $N=2$ к $N=7$ результаты меняются на величину меньшую, чем μ. Этот вывод верен и для других значений γ, которые мы не приводим. Учет же второго резонансного члена, пропорционального $e^2 \cos 2s$, желателен при нахождении решения e_3.

Приведем теперь пример траектории, близкой к решению e_1. Численным образом для начальных условий $y_1=y_2=0$, $e_0=0{,}1317$, $\gamma=0{,}64$ (которые определялись после некоторого числа итераций) на интервале 240 оборотов Юпитера была вычислена орбита, фазовая траектория которой представлена на рис. 4. Естественно, значение γ для этой траектории уже не было постоянным, а испытывало колебания с амплитудой порядка μ около среднего значения, которое оказалось равным 0,6388. Для этого значения γ при $N=2$ аналитическое решение для e_1 дает $\bar{p}=0{,}130$. Поэтому в качестве координат на рис. 4 взяты величины $\Delta_p=p-\bar{p}$ и $\Delta_q=q$. Как следует из рис. 4, отклонения фазовой траектории от стационарного значения — величина порядка 10^{-3}, что, по-видимому, объясняется влиянием неучтенных членов, пропорциональных e^3 и выше.

Таким образом, качественное сравнение результатов с данными численного интегрирования подтверждает правильность выбранного подхода и верность избранной аналитической модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Герасимов И. А.//Астрон. журн. 1983. **60**. С. 163. [2] Герасимов И. А.// //Астрон. журн. 1986. **63**. С. 768. [3] Герасимов И. А. // Астрон. журн. 1988. **65**. С. 1000. [4] Герасимов И. А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1975. **16**, № 6. С. 749. [5] Герасимов И. А.//Астрон. журн. 1982. **59**. С. 1190. [6] Message P. J.// //Inter. Astron. Union. Sympos. 1966. N 25.P. 197.

Поступила в редакцию
13.04.87