

УДК 517.9

ОБЛАСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО, СУБГАРМОНИЧЕСКОГО И ХАОТИЧЕСКОГО ИЗМЕНЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВНЕШНЕЙ СИЛОЙ — ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

В. А. Макаров, А. В. Матвеева

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Численно исследовано влияние поглощения на размеры и положение области в пространстве параметров уравнения ангармонического осциллятора с гармонической внешней силой, внутри которой возникают режимы умножений периода колебаний и динамический хаос.

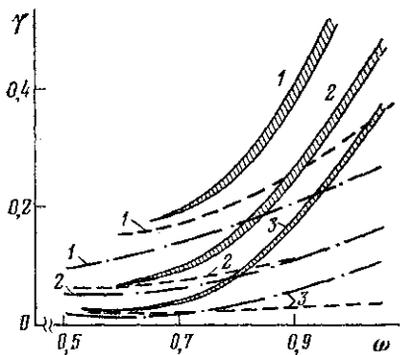
1. Исследование уравнения ангармонического осциллятора с периодической внешней силой

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + x - \gamma x^3 = \cos \omega t, \quad \gamma > 0, \tag{1}$$

проведенное методом численного интегрирования, показало (подробная библиография содержится в [1, 2]) существование отдельных частотных интервалов $\Delta\omega_{k,n}$, на которых в спектре решения появляются субгармоники $\omega/(k \cdot 2^n)$ ($k=1, 3, 5, 7; n=0, 1, 2, \dots$), и областей $\Delta\omega_k$, где изменение $x(t)$ носит хаотический характер. Сейчас становится актуальным построение трехмерной области $\Delta\omega(\alpha, \gamma)$, внутри которой возникают режимы умножений периода колебаний $x(t)$ и динамический хаос. Первым шагом к этому является, по-видимому, работа [3, 4], где приведены границы $\Delta\omega(\gamma)$ для $\gamma \leq 0,5$ и $\alpha=0,4$ и подробно проанализирована динамика перехода от периодического изменения $x(t)$ к хаотическому при плавном уменьшении ω .

Аналитического метода поиска точных границ области параметров нелинейных диссипативных систем осцилляторного типа с внешним воздействием, внутри которой решение имеет хаотический характер, в настоящее время не существует. Удаётся определить только необходимые условия возникновения динамического хаоса [5, 6] для весьма узкого класса колебательных систем. Представляется возможным также указать величины параметров [7], вблизи которых с наибольшей вероятностью можно искать предшествующие хаосу режимы генерации субгармоник.

В данной работе приведены результаты численного исследования (1), показывающие влияние поглощения на размеры и положение области $\Delta\omega(\alpha, \gamma)$. Полученные результаты сравниваются с двумя формулами $\gamma_{1,2} = \gamma_{1,2}(\alpha, \omega)$, найденными при помощи изложенных в [5] и [7] двух приближенных методов и дающими хорошую оценку положения нижней (по γ) границы области $\Delta\omega(\alpha, \gamma)$ на плоскости γ и ω . Использование $\gamma_{1,2}$ в качестве первого приближения значительно ускоряет процедуру численного поиска $\Delta\omega(\alpha, \gamma)$.



Влияние поглощения на размеры и положение области сложного динамического поведения решения уравнения (1)

2. Для численного интегрирования (1) использовалась традиционная разностная схема четвертого порядка точности (более подробно см. [3]). Режимы умножений периода колебаний и хаотическое изменение $x(t)$ возможны в узком частотном интервале, если γ больше некоторой критической величины $\gamma_k(\alpha)$ (см. рисунок). Приближение к заштрихованной области справа сопровождается резким возрастанием амплитуд четных гармоник в спектре решения. При дальнейшем уменьшении ω внутри заштрихованной области мы последовательно попадаем в частотные интервалы $\Delta\omega_{1,n}; \Delta\omega_{x,1}; \Delta\omega_{3,n}; \Delta\omega_{x,3}; \Delta\omega_{5,n}; \Delta\omega_{x,5}, \dots$, т. е. переход в интервал $\Delta\omega_{x,k}$, где спектр решения (1) непрерывен, происходит через бесконечную последовательность удвоенного периода колебаний вида $k \cdot 2^n$. На рисунке области 1—3 соответствуют $\alpha=0,2; 0,4; 0,6$. Размеры областей сложного динамического поведения существенно зависят от величины α . С увеличением γ (при фиксированном α) ширина интервала $\Delta\omega$ растет, а с уменьшением α (при фиксированном γ) — уменьшается.

3. Представим (1) в виде, необходимом для применения метода, изложенного в [5]:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \gamma x_1^3 + \mu g(x_1, x_2, t), \quad (2)$$

где $\mu g = -\alpha x_2 + \cos \omega t$. Согласно [5], необходимым условием появления гомоклинической структуры, предшествующей хаосу, является наличие простых нулей у функции

$$D(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x_{2s}(t) - \cos(\omega(t+\tau))) x_{2s}(t) dt.$$

Здесь $x_{1s} = \pm \text{th}(t/\sqrt{2})/\sqrt{\gamma}$, $x_{2s} = \pm (2\gamma \text{ch}^2(t/\sqrt{2}))^{-1}$ — решение (2) при $\mu=0$ на сепаратрисе

$$2\gamma x_2^2 = (1 - \gamma x_1^2)^2. \quad (3)$$

Функция $D(\tau)$ имеет простые нули, если $\gamma > \gamma_1 = (2\alpha \text{sh}(\pi\omega/\sqrt{2})(3\pi\omega)^{-1})^2$. На рисунке пунктирными кривыми показана зависимость $\gamma_1(\omega, \alpha)$ (кривым 1—3 соответствуют $\alpha=0,2; 0,4; 0,6$). При малых α и γ метод [5] дает хорошее приближение для верхней (по ω) границы области $\Delta\omega_{1,1}$.

4. Область стохастического поведения гамильтоновых систем находится около сепаратрисы нелинейного резонанса [8]. По аналогии можно предположить [7], что хаотическое решение (1) возникает при значениях α, ω и γ , близких к тем, при которых происходит пересечение сепаратрисной кривой (3) с фазовой траекторией, определяемой приближенным решением (1). Последнее может быть найдено, например, методом медленно меняющихся амплитуд. В этом случае оно имеет вид

$$x(t) = \{x_0 \exp(i\omega t) + \text{к. с.}\}/2, \quad (4)$$

где $|x_0|^2$ задается уравнением

$$|x_0|^2 ((1 - \omega^2 - 3\gamma|x_0|^2/4)^2 + \alpha^2\omega^2) = 1. \quad (5)$$

Решению (4) на фазовой плоскости (\dot{x}, x) соответствует эллипс

$$x_1^2/|x_0|^2 + x_2^2/(\omega|x_0|)^2 = 1. \quad (6)$$

Кривые (3) и (5) пересекаются, если получаемое в результате подстановки (3) в (5) биквадратное уравнение имеет действительные корни. Последнее выполняется, когда

$$\gamma > \gamma_2 = (1 - \omega^2/2) [(2 - 5\omega^2)^2/64 + \alpha^2\omega^2].$$

На рисунке штрих-пунктирными кривыми показана зависимость $\gamma_2(\omega, \alpha)$ (кривым 1—3 соответствуют $\alpha=0,2; 0,4; 0,6$).

Сравнение пунктирных и штрих-пунктирных кривых показывает, что при малых α и ω оба метода дают практически одинаковые результаты. При $\omega \sim 1$ ситуация меняется, и $\gamma_2(\omega, \alpha)$, определяемая на основе полунитунтивного критерия [7], дает даже более хорошее приближение для верхней границы области $\Delta\omega_{1,1}$, чем [5].

Полученные аналитические оценки значительно ускоряют процедуру численного поиска областей хаоса в полном пространстве параметров уравнения (1).

Авторы благодарны С. А. Ахманову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М., 1987. [2] Røtøy R., Isohäki H. N., Voehm J. //Acta Polytechn. Scand. (mech. eng.). 1984. 87, N 1. P. 1. [3] Желудев Н. И., Макаров В. А., Матвеева А. В., Свирко Ю. П. //Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астроф. 1984. 25, № 5. С. 106. [4] Макаров В. А., Матвеева А. В. //Тез. докл. XII Всесоюз. конф. по когерент. и нелин. оптике. М., 1985. С. 313. [5] Мельников В. К. //ДАН СССР. 1963. 148, № 6. С. 1257. [6] Holmes P. J., Marsden J. E. //J. Math. Phys. 1982. 23, N 4. P. 669. [7] Golubkov A. A., Makarov V. A., Matveeva A. V. //Phys. Lett. 1988. 127A, N 2. P. 125. [8] Заславский Г. М. Стохастическая динамика. М., 1983.

Поступила в редакцию
01.03.88