

лижении все ГГ, кроме  $Y_n$ , выпадают из задачи. С учетом этого и разложения (9) выражение (8) дается формулой

$$E = E_0 - \frac{128}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{[(2n+1)(2n+3)]^2 n(n+2)} \gamma_n^2.$$

Для  $z=2$  получаем  $E = -2,79$  а. е. Отклонение этого значения от точного составляет 3,8%.

Для нормированной волновой функции атома гелия с учетом (6), (9), (10), (11) получаем следующее окончательное выражение:

$$\Psi(r_1, r_2) = 1,43e^{-c\rho} \left\{ 1 + 8\rho \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)n(n+2)} \times \right. \\ \left. \times \left[ 2(1+(-1)^n) \frac{\sin 2(n+1)\theta}{\sin 2\theta} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin 2(n+1)\tilde{\theta}}{\sin 2\tilde{\theta}} \right] \right\},$$

где

$$\rho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}, \quad \theta = \arctg \frac{r_1}{r_2}, \quad \tilde{\theta} = \arctg \frac{|r_1 - r_2|}{|r_1 + r_2|},$$

$c$  определяется из (5) при  $z=2$ .

Автор выражает искреннюю признательность В. Д. Эфросу за предложенную тему и плодотворные дискуссии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Джибути Р. И., Ефремидзе Т. И., Теодорадзе Д. К. // Хим. физика. 1987. 6, № 1. С. 34. [2] Бадалян А. М., Симонов Ю. А. // Ядерная физика. 1966. 3, № 6. С. 1032. [3] Ballot J. L., Fabre de la Ripelle M. // Ann. of Phys. (N. Y.) 1980. 127. P. 62. [4] Эфрос В. Д. // Ядерная физика. 1978. 27, № 3. С. 845. [5] Эфрос В. Д. // Там же. 1972. 15, № 2. С. 226.

Поступила в редакцию  
07.08.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 6

#### РАДИОФИЗИКА

УДК 621.375.7

#### ОБОБЩЕННЫЙ ЭФФЕКТ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕМПИРОВАНИЯ ШУМА В РЕЗОНАНСНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЦЕПЯХ

А. В. Гусев, В. Н. Руденко

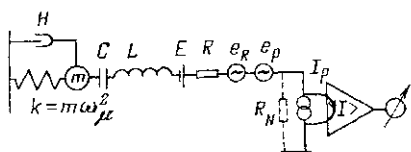
(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

Исследован режим минимальных шумов для измерительных цепей типа пробный осциллятор + резонансный электромеханический преобразователь. Приведена формула для расчета амплитуды порогового сигнала при больших значениях коэффициента электромеханической связи.

Измерение малых сил, действующих на пробный осциллятор (ПО), представляет значительный интерес в экспериментальной физике [1, 2]. Создание колебательных систем с малой диссипацией [3]

предъявляет высокие требования к шумам электромеханического преобразователя. Широкое распространение в эксперименте получили электростатические преобразователи [4]. Такой датчик представляет собой конденсатор, одна из обкладок которого подвижна; емкость конденсатора связана с измеряемым смещением  $x(t)$  соотношением  $C = C_0(1 - x/d)^{-1}$ ,  $C_0 = S/4\pi d$ ,  $S$  — площадь обкладок,  $d$  — «средний» зазор.

Эквивалентная схема подобного преобразователя с использованием стандартных обозначений [5] приведена на рисунке. Шумы в схеме: 1) тепловой шум контура  $E_R = e_R E$ ; 2) тепловые шумы ПО  $F_\mu = f_\mu k d$ ; 3) шумы предусилителя  $E_p = e_p E$ ,  $I_p = i_p I_0$ ,  $I_0 = E/\rho$ ,  $\rho = (L/C_0)^{1/2}$ . Основной количественной мерой шумов предусилителя в диапазоне  $\omega \approx \omega_\mu$ , где  $\omega_\mu$  — резонансная частота ПО, является его минимальная шумовая температура (при  $\overline{E_p(t_1)I_p(t_2)} = 0$ ) [6]  $T_N = (2\pi/\kappa) \times \times [|\widehat{I}_p(\omega_\mu)|^2 |\widehat{E}_p(\omega_\mu)|^2]^{1/2}$ ,  $\kappa$  — постоянная Больцмана. При заданной минимальной шумовой температуре  $T_N$  шумовое сопротивление предусилителя  $R_N = \kappa T_0 (\pi |\widehat{I}_p(\omega_\mu)|^2)^{-1}$ ,  $T_0 = 300K$ , может изменяться в широких пределах за счет согласующего устройства [6].



Принцип электромеханических аналогий [4] позволяет рассматривать схему на рисунке как каскад с двухконтурным фильтром на входе. Интенсивность шума такого каскада на частоте  $\omega = \omega_\mu$  с учетом потерь в двухконтурном фильтре достигает минимума при  $\lambda \rightarrow \infty$ , где  $\lambda = C_0 E^2 / k d^2$  —

коэффициент электромеханической связи [6]. При обнаружении широкополосных сигналов результаты расчета шума на парциальной частоте  $\omega_\mu$  нельзя считать достаточными. Они могут служить только косвенным подтверждением, что выбранная в [5] «стратегия измерений» на фоне тепловых шумов — создание электромеханических преобразователей с большими значениями коэффициента  $\lambda$  — может сохраниться и при учете шумов предусилителя. Подробному расчету чувствительности, учитывающему шумы предусилителя, и посвящена настоящая работа.

Уравнения движения в безразмерном времени  $\tau = \omega_\mu t$  для схемы на рисунке могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} (p^2 + Q_\mu^{-1} p + \omega_\mu^2) \xi - \lambda \alpha &= f + f_\mu, & -\xi + (p^2 + Q_e^{-1} p + 1) &= e_R + e_p, \\ i &= p\alpha + ip, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $p = d/d\tau$ ;  $\xi = x/d$ ;  $f = F/kd$ ;  $\alpha = \tilde{q}/q_0$  — относительные вариации заряда,  $q_0 = C_0 E$ ;  $Q_\mu$ ,  $Q_e$  — добротности механической и электрической цепей соответственно;  $i = I/I_0$ .

Решая (1) относительно  $i(\tau)$ , находим ( $Q_\mu \rightarrow \infty$ )

$$D(v) \widehat{i}(v) = \widehat{Z}_f(v) + \widehat{Z}_N(v), \quad (2)$$

где  $\widehat{Z}_{f,N}(v)$  — спектральные плотности сигнальной и шумовой составляющих,

$$\widehat{Z}_f(v) = jv \widehat{f}(v), \quad |\widehat{Z}_N(v)|^2 = v^2 (1 - v^2)^2 |\widehat{e}_n(v)|^2 + |D(v)|^2 |\widehat{i}_p(v)|^2. \quad (3)$$

Здесь

$$v = \omega/\omega_\mu; \quad \widehat{f}(v) = \frac{\omega_\mu \widehat{F}(v\omega_\mu)}{kd}; \quad |\widehat{e}_n(v)|^2 = \frac{|\widehat{E}_R(v\omega_\mu)|^2 + |\widehat{E}_p(v\omega_\mu)|^2}{\lambda kd^2 \rho};$$

$$|\widehat{I}_p(v)|^2 = \frac{|\widehat{I}_p(v\omega_\mu)|^2 \rho}{\lambda kd^2}; \quad D(v) = (1-v^2)^2 - \lambda + Q_e^{-1} jv(1-v^2). \quad (4)$$

Из (2), (3) можем определить переходную функцию оптимального приемника [7] для обнаружения ультракоротких «всплесков»:

$$H_{\text{opt}}(\tau) = C \int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{Z}_f^*(v)/|\widehat{Z}_N(v)|^2] e^{jv(\tau-\tau_0)} dv =$$

$$= C \exp\left(-\frac{\eta}{4}(\tau-\tau_0)\right) \sin(\gamma + |\tau-\tau_0|(\lambda/4)^{1/2} \sin \gamma) \sin(\tau-\tau_0), \quad (5)$$

где  $C$ ,  $\tau_0$  — произвольные постоянные;

$$\eta = \left[ Q_e^{-2} + \frac{|\widehat{e}_n(1)|^2}{|\widehat{I}_p(1)|^2} \right]^{1/2}, \quad \cos \gamma = (\eta^2/4\lambda)^{1/2}.$$

Анализ (5) позволяет установить время релаксации  $\tau_{\text{opt}}$  в оптимальном приемнике:

$$\tau_{\text{opt}}(\lambda) = \begin{cases} (4/\eta), & \lambda \geq (\eta/2)^2, \\ (4/\eta)(\eta^2/4\lambda)[1 + \sqrt{1-(4\lambda/\eta^2)}], & \lambda < (\eta/2)^2. \end{cases} \quad (6)$$

В физически реализуемом приемнике [8] параметр  $\tau_{\text{opt}}$  ограничен:  $\tau_1 \leq \tau_{\text{opt}} \leq \tau_2$ . Это условие в зависимости от величины фактора  $\eta$  можно реализовать в двух режимах:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \lambda \geq \frac{(\eta\tau_0/2) - 1}{(\tau_2/2)^2}, \quad (4/\tau_2) \leq \eta \leq (4/\tau_1), \\ \text{б) } \frac{(\eta\tau_2/2) - 1}{(\tau_2/2)^2} \leq \lambda \leq \frac{(\eta\tau_1/2) - 1}{(\tau_1/2)^2}, \quad \eta > (4/\tau_1). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ограничение времени установления  $\tau_{\text{opt}}$  «снизу» позволяет использовать приемник (5) для обнаружения сигналов с конечной длительностью  $\widehat{\tau}$  при  $\omega_\mu \widehat{\tau} \leq \tau_1$ . Тепловые шумы ПО ограничивают допустимое время релаксации «сверху»:  $\tau_2 \leq \omega_\mu \widehat{\tau} \mu_t$ ,  $\mu_t \gg 1$  — отношение сигнал/шум на входе. В дальнейшем условие (7) предполагаем выполненным.

Отношение сигнал/шум  $\mu$  на выходе оптимального приемника дается формулой

$$\mu = 2 \int_0^{\infty} |\widehat{Z}_f(v)|^2 |\widehat{Z}_N(v)|^{-2} dv = |\widehat{f}(0)|^2 \pi / (4 |\widehat{I}_p(1)|^2 \lambda \eta).$$

Для размерных физических величин (4) получим

$$\mu = (F_0 \widehat{\tau})^2 / (8kT_N m \varepsilon), \quad (8)$$

$$\varepsilon = \left[ 1 + 4 \frac{R}{R_N} \left( \frac{T_0}{T_N} \right)^2 \left( \frac{R}{R_N} + \frac{T}{T_0} \right) \right]^{1/2}, \quad \eta = \frac{1}{2Q_e} \left( \frac{R}{R_N} \right) \frac{T_N}{T_0} \varepsilon. \quad (9)$$

где  $T$  — физическая температура.

Оптимизация (8) по величине шумового сопротивления предусилителя  $R_N$  обеспечивает режим минимальных шумов:  $\epsilon \rightarrow 1$ ,  $R/R_N \rightarrow 0$ . Принимая во внимание (9), убеждаемся, что при  $R/R_N \rightarrow 0$  фактор  $\eta$  неограниченно возрастает. «Большие» значения параметра  $\eta$  приводят к необходимости обеспечить сильную связь  $2\eta/(\omega_r \tau \mu_i) \ll \lambda \ll \ll 2\eta(\omega_r \tau)$  при  $\eta \rightarrow \infty$ . Этот результат обобщает «оптимальную стратегию измерений» [5] с учетом шумов предусилителя, а сам динамический режим  $\lambda \sim \eta \rightarrow \infty$  естественно назвать обобщенным режимом динамического демпфирования.

Существование оптимального значения коэффициента связи  $\lambda$  в работе [9] связывалось с необходимостью обеспечить наибольшую амплитуду сигнального отклика,  $\lambda_{opt} = 2/(\omega_r \tau Q_e)$ ,  $\omega_r \tau \ll Q_e$ . Однако при расчете шума многокаскадных схем основную роль играет коэффициент передачи отдельного каскада по номинальной мощности с учетом реактивной составляющей импеданса электрической цепи  $Z(v) = (1-v^2)^{-1}D(v)$ . Для больших значений  $\lambda$ , очевидно,  $|Z(v)| \sim \lambda$ ; при этом номинальная мощность (в размерных единицах) в электрической цепи с ростом  $\lambda$  не падает. Это обеспечивает при «больших»  $\lambda$  пороговую чувствительность (8) (для  $\epsilon = 1$ ), определяемую только минимальной шумовой температурой предусилителя, в конечной полосе частот  $\Delta\omega \approx 1/(\tau \mu_i)$  за счет демпфирования тепловых флуктуаций преобразователя.

Авторы выражают благодарность В. Б. Брагинскому за обсуждение основных результатов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Брагинский В. Б. Физические эксперименты с пробными телами. М., 1972. [2] Брагинский В. Б., Манукин А. Б. Измерение слабых сил в физических экспериментах. М., 1976. [3] Брагинский В. Б., Митрофанов В. П., Панов В. И. Колебательные системы с малой диссипацией. М., 1983. [4] Харкевич А. А. Теория преобразователей//Избранные труды. М., 1968. Т. 4. [5] Гусев А. В., Руденко В. Н.//Радиотехн. и электроника. 1976. 25. С. 1816. [6] Айнбиндер И. М. Шумы радиоприемников. М., 1974. [7] Тихонов В. И. Оптимальный прием. М., 1983. [8] Гуткин Л. С. Оптимальный прием сигналов на фоне флуктуационных помех. М., 1972. [9] Гусев А. В., Гордиенко В. Н., Руденко В. Н.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1977. 18, № 3. С. 41.

Поступила в редакцию  
17.06.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 6

УДК 621.373+532.517

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В НЕАВТОНОМНОЙ АВТОСТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

С. А. Афанасьев, Д. А. Грибков, Ю. И. Кузнецов

(кафедра физики колебаний)

Показано, что внешнее регулярное воздействие вне областей синхронизации приводит к сглаживанию спектральной плотности хаотических колебаний в автостохастических системах. Рассмотрены сценарии переходов к хаосу в неавтономном генераторе хаотических колебаний с туннельным диодом в цепи контура.

Известно, что хаотические автоколебания могут быть синхронизированы внешним периодическим воздействием [1—4]. Однако остается невыясненным вопрос о том, как влияет внешнее регулярное воз-