

(3). Еще раз напомним, что ряды (13) и (15) — асимптотические и должны быть оборваны до того, как члены ряда начнут возрастать, т. е. пока все элементы матрицы B малы (что определяется подбором подходящих граничного радиуса a и номера N обрезания ряда (15), $|\beta \gamma(n-2+N)| \ll 1$).

3. Подведем итоги. Предложенная нами методика позволяет провести вычисление радиальной части матричного элемента (3) перехода любой мультипольности для электрона в произвольном поле. При этом во внутренней области волновые функции и интеграл находятся численно, а во внешней области условно сходящийся интеграл выражается через значения функций и их производных на границе в виде асимптотического ряда.

Заметим, что все полученные формулы применимы также и для частного случая $z=0$, т. е. для переходов в поле нейтрального атома с потенциалом, убывающим быстрее $1/r$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sommerfeld A., Maue A. // *Ann. Phys.* 1935. 23. P. 589. [2] Бабиков В. // *Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций*. М., 1958. Т. 2. С. 226. [3] Фирсов О. Б., Чибисов М. И. // *ЖЭТФ*. 1960. 39. С. 1770. [4] Касьянов В., Старостин А. // *ЖЭТФ*. 1965. 48. С. 295. [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Квантовая механика*. М., 1974. [6] Гольдбергер М., Ватсон К. *Теория столкновений*. М., 1967. [7] Burgess A., Hummer D. H., Tully J. A. // *Phil. Trans.* 1970. A266. P. 225. [8] Peach G. // *Mem. Roy. Astr. Soc.* 1967. 71. P. 13. [9] Summers H. P. Preprint JET-P(86)06.

Поступила в редакцию
26.06.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1988. Т. 29, № 6

УДК 535.241.13:534.23.8

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА АКУСТООПТИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИИ НА ОГРАНИЧЕННОМ ЗВУКОВОМ ПУЧКЕ

М. А. Воронова, В. Н. Парыгин

(кафедра физики колебаний)

Решается задача дифракции Брэгга на ограниченном звуковом столбе с помощью нового метода, использующего четырехмерное спектральное представление светового и звукового пучков.

Решение задачи дифракции светового пучка на звуковом пучке произвольной конфигурации представляет большой интерес в акустико-оптических приложениях. На сегодняшний день эта задача полностью не решена, так как в рамках существующих методов она представляется очень сложной и трудоемкой. В настоящей работе предлагается новый подход к такого класса задачам. Он опирается на изложенный в [1] метод расчета дифракции расходящейся световой волны на произвольном акустическом сигнале. Существенное отличие состоит в том, что распределение поля в пучках представляется через четырехмерный спектр. Это значительно упрощает результаты.

Рассмотрим применение спектрального метода для оптически изотропного случая. Введем обозначения: $\mathbf{r} = \left\{ x, y, z, i \frac{c}{n} t \right\}$ — четырехмерный вектор координаты, $\mathbf{k} = \left\{ k_x, k_y, k_z, \frac{i\omega}{c} n \right\}$ — четырехмер-

ный волновой вектор света, $\mathbf{K} = \left\{ K_x, K_y, K_z, i \frac{\Omega}{c} n \right\}$ — четырехмерный волновой вектор звука, n — показатель преломления среды в отсутствие звука, c — скорость света в вакууме, t — время, ω и Ω — световая и акустическая частоты. Пусть $E(\mathbf{r})$ — поле в пучке световой волны. Изменение показателя преломления, вызванное распространением звука, имеет вид $\tilde{n} = n + \Delta n f(\mathbf{r})$, где $f(\mathbf{r})$ — функция, характеризующая распределение деформаций в звуковом пучке. Акустооптическая дифракция в оптически изотропной среде описывается волновым уравнением [1], которое в наших обозначениях примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E(\mathbf{r}) = \frac{2n}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\Delta n E(\mathbf{r}) f(\mathbf{r})]. \quad (1)$$

Здесь

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Используем представление функций $E(\mathbf{r})$ и $f(\mathbf{r})$ четырехкратным интегралом Фурье:

$$E(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (2)$$

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{K}) e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}} d\mathbf{K},$$

где $u(\mathbf{k})$ и $F(\mathbf{K})$ — четырехмерные спектры светового и звукового пучков, связанные с функциями, описывающими поле световых и звуковых волн, преобразованием Фурье:

$$u(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} E(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (3)$$

$$F(\mathbf{K}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}} d\mathbf{r}.$$

Подставляя (2) в (1) и осуществляя интегрирование под знаком интеграла, получим интегральное уравнение относительно $u(\mathbf{k})$:

$$\mathbf{k}ku(\mathbf{k}) = \frac{2n}{c^2} \frac{\Delta n}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} u(\mathbf{k}-\mathbf{K}) F(\mathbf{K}) d\mathbf{K}. \quad (4)$$

Решение (4) будем искать в виде разложения спектра дифрагированного света по степеням малого параметра $\Delta n/n$:

$$u(\mathbf{k}) = \sum_{m=0}^{\infty} u^{(m)}(\mathbf{k}) \left(\frac{\Delta n}{n} \right)^m. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим соотношение

$$u^{(m+1)}(\mathbf{k}) = \frac{2\omega^2 n^2}{c^2 \mathbf{k}\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{(m)}(\mathbf{k}-\mathbf{K}) F(\mathbf{K}) d\mathbf{K}. \quad (6)$$

Уравнение (4) можно свести к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода [2]. Выбор в (6) в качестве нулевого приближения $u^{(0)}(\mathbf{k})$ спектра падающей световой волны, приходящей из бесконечности, выделяет из всего множества возможных решений (4) единственное. При этом отпадает необходимость задавать условия на границе звукового пучка. Это облегчает решение задачи для пучков сложной конфигурации и для пучков с размытыми границами.

Поле дифрагированной световой волны рассчитывается по формуле

$$E = \sum_{m=0}^{\infty} E^{(m)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Delta n}{n}\right)^m \int_{-\infty}^{\infty} u^{(m)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (7)$$

Скалярное произведение волновых векторов в знаменателе (6) $\mathbf{k}\mathbf{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 n^2 / c^2$ вносит в четырехмерный спектр $u(\mathbf{k})$ особые точки, в которых спектр обращается в бесконечность. Это означает, что под интегралом в (7) следует понимать интеграл в смысле главного значения. Особые точки соответствуют собственным плоским волнам среды, описываемым поверхностью волновых векторов света. Начальные условия, задаваемые спектром падающих электромагнитных волн, определяют правила обхода особых точек при интегрировании (7).

Для примера рассмотрим решение задачи дифракции плоской монохроматической световой волны на плоском монохроматическом звуковом столбе, который создается плоским прямоугольным преобразователем с размерами $2a \times 2b$. Амплитуда деформаций на поверхности преобразователя задается единственным законом распределения:

$$f(\mathbf{r})|_{z=0} = \begin{cases} \cos \Omega_0 t, & \text{если } |x| \leq a \text{ и } |y| \leq b; \\ 0, & \text{если } |x| > a \text{ или } |y| > b. \end{cases}$$

Из (3) получаем выражение для четырехмерного спектра звукового столба, создаваемого таким преобразователем в среде без учета дифракционных искажений:

$$F(\mathbf{K}) = \frac{ab}{2\pi^2} \operatorname{sinc} \frac{K_x a}{\pi} \operatorname{sinc} \frac{K_y b}{\pi} [\delta(K_z, K_0; \Omega, \Omega_0) + \delta(K_z, -K_0; \Omega, -\Omega_0)], \quad (8)$$

где Ω_0 — частота звука, K_0 — его волновое число, $\delta(x^1, \xi^1; x^2, \xi^2)$ — двумерная дельта-функция Дирака [2]. Волновой вектор звука ориентирован строго по нормали к поверхности преобразователя.

Спектр (8) можно записать в виде суммы:

$$F(\mathbf{K}) = \frac{1}{2} [F_+(\mathbf{K}) + F_-(\mathbf{K})].$$

При расчете спектра дифрагированного света взаимодействие с F_+ будет соответствовать процессу с увеличением частоты, с F_- — с уменьшением частоты.

Рассмотрим дифракцию Брэгга в +1-й максимум. В первом приближении в качестве спектра звука в (6) надо брать $F = (1/2)F_+$. Падающая световая монохроматическая волна с плоским фронтом имеет спектр

$$u_0^{(0)}(\mathbf{k}) = \delta(k_x, k_{x0}; k_y, k_{y0}; k_z, k_{z0}; \omega, \omega_0). \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (6) и учитывая свойства δ -функции, получим

$$u_1^{(1)}(\mathbf{k}) = \frac{k_1^2}{kk} \frac{ab}{\pi^2} \operatorname{sinc} \frac{\Delta k_x a}{\pi} \operatorname{sinc} \frac{\Delta k_y b}{\pi} \delta(k_z, k_{z1}; \omega, \omega_1), \quad (10)$$

где $\omega_1 = \omega_0 + \Omega_0$, $k_{z1} = k_{z0} + K_0$, $k_1 = \omega_1 n/c$, $\Delta k_x = k_x - k_{x0}$, $\Delta k_y = k_y - k_{y0}$.

Поле дифрагированного света в первом порядке находим, подставляя (10) в (7):

$$E_1^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\Delta n}{n} \frac{ab}{\pi^2} k_1^2 e^{i(k_{z1} z - \omega_1 t)} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{\Delta k_y b}{\pi} e^{ik_y y} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{\Delta k_x a}{\pi} e^{ik_x x} \frac{dk_x dk_y}{k_x^2 - \tilde{k}^2(k_y)}. \quad (11)$$

$$\text{Здесь } \tilde{k}(k_y) = \sqrt{k_1^2 - k_{z1}^2 - k^2} = \sqrt{k_{x1}^2 - 2k_{y0} \Delta k_y - (\Delta k_y)^2}, \quad k_{x1} = \\ = \sqrt{k_1^2 - k_{z1}^2 - k_{y0}^2}.$$

Значение интегралов в (11), вычисляемых с помощью теории вычетов, зависит от того, в какой области мы исследуем дифракцию. Пусть $k_{x0} > 0$, $k_{y0} > 0$, т. е. падающая световая волна приходит из области отрицательных x и y . Дифракцию проходящих волн будем определять в области $x > a$. Правило обхода полюсов задается условием, налагаемым на $E(\mathbf{r})$ при $x \rightarrow \infty$. При формальной замене k_x на $k_x + i\varepsilon$, где ε — малая положительная величина, полюсы смещаются в комплексную область. Внутри контура интегрирования, проходящего в случае $x > a$ в верхней комплексной полуплоскости, остается лишь полюс $\tilde{k} + i\varepsilon$. После интегрирования по dk_x , устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$E_1^{(1)}(\mathbf{r}) = i \frac{\Delta n}{n} \frac{ab}{\pi} k_1^2 e^{i(k_{z1} z - \omega_1 t)} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{\Delta k_y b}{\pi} \times \\ \times \operatorname{sinc} \left(\frac{\tilde{k} - k_{x0}}{\pi} a \right) e^{i(k_y y + \tilde{k} x)} \frac{dk_y}{\tilde{k}}. \quad (12)$$

Предположим, что волновые размеры преобразователя достаточно велики ($K_0 a \gg 1$, $K_0 b \gg 1$). Произведение спектральных функций преобразователя в (12) обеспечивает сходимость интеграла в сравнительно узком спектральном диапазоне Δk_y , вне которого значение подынтегрального выражения является пренебрежимо малым. Пусть угол между проекцией волнового вектора падающей световой волны на плоскость $z=0$ и осью x не очень велик и можно считать, что $\Delta k_{y0} k_{y0} / k_{x1}^2 \ll 1$. При этом справедливо:

$$\tilde{k}(k_y) = k_{x1} - \tau \Delta k_y - \beta (\Delta k_y)^2,$$

где $\tau = k_{y0} / k_{x1}$, $\beta = (1 + \tau^2 / 4) / 2k_{x1}$, причем $\beta (\Delta k_y)^2 \ll k_{x1}$, $\beta a (\Delta k_y)^2 \ll 1$.

В ближней зоне дифракции также и $\beta x (\Delta k_y)^2 \ll 1$. Отбросив пренебрежимо малые члены, получаем в ближнем поле

$$E_1^{(1)}(\mathbf{r}) \approx iq \frac{ab}{\pi} e^{i(k_{x1}x + k_{y0}y + k_{z1}z - \omega_1 t)} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc} \frac{\Delta k_y b}{\pi} \times \\ \times \text{sinc} \left(\frac{\eta - \tau \Delta k_y}{\pi} a \right) e^{i \Delta k_y (y - \tau x)} d(\Delta k_y), \quad (13)$$

где $\eta = k_{x1} - k_{x0}$, $q = \frac{\Delta n}{n} \frac{k_1^2}{k_{x1}}$.

Интеграл в (13) вычисляется с помощью теории вычетов. В особых точках на действительной оси используются полувычеты. Пространство за преобразователем $x > a$ можно разделить на четыре области, в каждой из которых интеграл (13) принимает различные значения (рис. 1). В случае $\tau < b/a$ это области

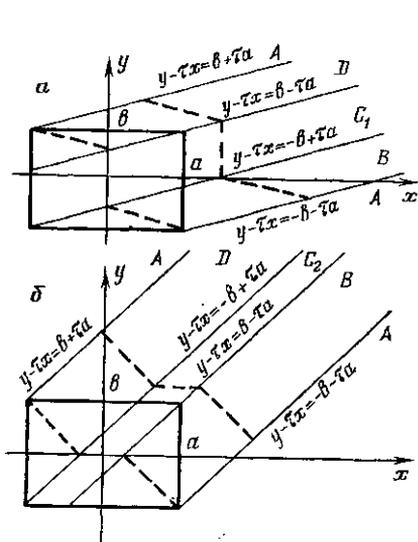


Рис. 1

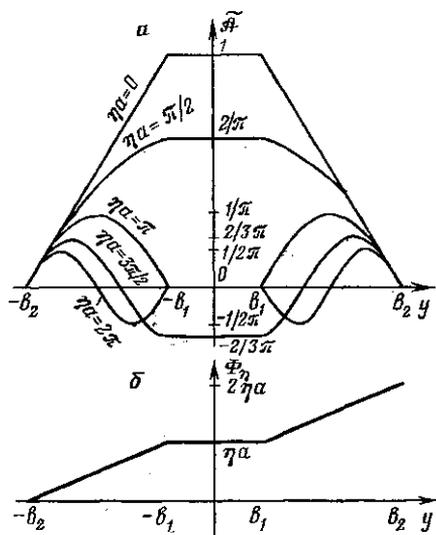


Рис. 2

$|y - \tau x| > b + \tau a$, $-b - \tau a < y - \tau x < -b + \tau a$, $-b + \tau a < y - \tau x < b - \tau a$ и $b - \tau a < y - \tau x < b + \tau a$. Обозначим их соответственно A, B, C и D (см. рис. 1, а). Для $\tau > b/a$ области B, C, D будут соответственно областями $-b - \tau a < y - \tau x < b - \tau a$, $b - \tau a < y - \tau x < -b + \tau a$, $-b + \tau a < y - \tau x < b + \tau a$ (см. рис. 1, б). Так как значение интеграла в области C при $\tau < b/a$ отличается от значения при $\tau > b/a$, то будем эти области различать как C_1 для $\tau < b/a$ и C_2 для $\tau > b/a$.

В области A значение интеграла (13) равно нулю. Пучок дифрагированного света заключен между плоскостями $y - \tau x = \pm (b + \tau a)$. В областях B, C_1 , C_2 и D представим поле дифрагированной волны в виде

$$E_1^{(1)}(\mathbf{r}) = \mathcal{A}(\mathbf{r}) e^{i[(\mathbf{k}_0 + \mathbf{K}_0 + \boldsymbol{\eta}) \mathbf{r} + \Phi]} = \mathcal{A}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} + \Phi)}, \quad (14)$$

где $\mathcal{A}(\mathbf{r})$ — амплитуда, \mathbf{k}_0 и \mathbf{K}_0 — четырехмерные волновые векторы падающей световой и звуковой волн, $\boldsymbol{\eta}$ — четырехмерный вектор рас-

стройки, Φ — фазовый сдвиг, определяемый геометрией звукового пучка. После интегрирования (13) в каждой из областей получаем

$$\mathcal{A}_B = iq\varphi_B \operatorname{sinc} \frac{\eta\varphi_B}{\pi}, \quad \varphi_B = \frac{1}{2\tau}(y - \tau x + b + \tau a),$$

$$\eta_B = \left\{ \frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2\tau}, 0, 0 \right\}, \quad \Phi_B = \frac{1}{2\tau} \eta(b - \tau a);$$

$$\mathcal{A}_{C_1} = iqa \operatorname{sinc} \frac{\eta a}{\pi}, \quad \eta_{C_1} = \{\eta, 0, 0, 0\}, \quad \Phi_{C_1} = 0;$$

$$\mathcal{A}_{C_2} = iqb \operatorname{sinc} \frac{\eta b}{\tau\pi}, \quad \eta_{C_2} = \left\{ 0, \frac{\eta}{\tau}, 0, 0 \right\}, \quad \Phi_{C_2} = 0;$$

$$\mathcal{A}_D = iq\varphi_D \operatorname{sinc} \frac{\eta\varphi_D}{\pi}, \quad \varphi_D = -\frac{1}{2\tau}(y - \tau x - b - \tau a),$$

$$\eta_D = \left\{ \frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2\tau}, 0, 0 \right\}, \quad \Phi_D = -\frac{1}{2\tau} \eta(b - \tau a).$$

(15)

На рис. 2, а представлена зависимость нормированной амплитуды $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/iqa$ для $\tau < b/a$ от $\tilde{y} = y - \tau x$ в ближнем поле дифракции для различных значений ηa . Границы областей обозначены $b_1 = b - \tau a$ и $b_2 = b + \tau a$. График справедлив и для $\tau > b/a$, если положить $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/iqb$, $b_1 = -b + \tau a$, ηa заменить на $\eta b/\tau$. Физический смысл дифракционной картины в областях B и D может быть понят, если учесть, что в области C длина взаимодействия света со звуком постоянна и равна a , а в областях B и D она линейно изменяется от 0 до a с изменением \tilde{y} . Поэтому в режиме, близком к синхронному, в области C эффективность дифракции максимальна. При $\eta a = \pi$ эффективность дифракции в C обращается в ноль вследствие обратной перекачки из первого максимума в нулевой. При этом наибольшая эффективность акустооптического взаимодействия достигается при длине области взаимодействия, равной $a/2$, т. е. в точке $\tilde{y} = (b_1 + b_2)/2$. Смысл дальнейшего изменения эффективности дифракции с расстройкой также очевиден.

На рис. 2, б приведен график изменения фазы расстройки $\Phi_\eta = \eta\tau + \Phi$ в плоскости фиксированного z при $x = a$. Фаза линейно растет от нуля при $\tilde{y} = -b_2$ до $\Phi_\eta = \eta a$ в $\tilde{y} = -b_1$. В области C фаза не изменяется, в области D фаза линейно растет от $\Phi_\eta = \eta a$ до $2\eta a$. На рис. 1 пунктирной линией показаны плоскости постоянной фазы расстройки. В области C они имеют излом, который исчезает при $\tau = b/a$.

На рис. 3 изображена диаграмма, позволяющая определить направление вектора расстройки в различных областях дифрагированного светового пучка. Как видно из (15), вектор расстройки всегда лежит в плоскости $k_z = k_{z1}$. Пунктирные линии 1 и 2 на диаграмме представляют соответственно сечение поверхности волновых векторов света плоскостью $k_z = k_{z1}$ и проекцию на эту плоскость сечения поверхности волновых векторов плоскостью $k_z = k_{z0}$. Векторы η_1, η_2, η_3 являются векторами расстройки для соответствующих областей (C_1, C_2, B и D). Их координаты определяются в (15).

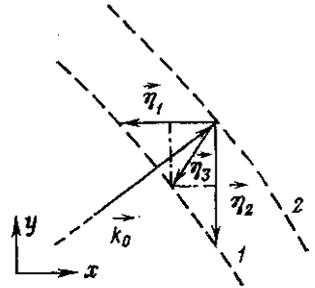


Рис. 3

Таким образом, наличие резких границ у прямоугольного звукового столба приводит к тому, что при отличной от нуля расстройке волновые векторы звука, падающего и дифрагированного света, вообще говоря, не лежат в одной плоскости. Это остается справедливым даже при $\tau = b/a$. И только при $\tau = b/a = 1$, когда столб создается квадратным преобразователем и направление проекции волнового вектора падающего света на поверхность преобразователя коллинеарно его диагонали, условие компланарности векторов k_0, k_1, K выполняется. Характерно, что в центральной области S направление вектора расстройки всегда совпадает с нормалью к границе звукового столба.

Для дальнего поля дифракции, когда $\beta x (\Delta k_y)^2 \gg 1$, к вычислению интеграла в (12) можно применить метод стационарной фазы [3]. Получим

$$E_1^{(1)}(r) |_{x \rightarrow \infty} \rightarrow i q \frac{ab}{\sqrt{\pi \beta x}} \operatorname{sinc} \frac{\psi b}{\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{\eta - \tau \psi}{\pi} a \right) e^{iK(k_0 + k_*) r} \times \\ \times e^{i \left[\eta x + \frac{1}{4\beta x} (y - \tau x)^2 - \frac{\pi}{4} \right]}, \quad (16)$$

где $\psi = (y - \tau x)/2\beta x$ — точка стационарной фазы. Формула (16) описывает цилиндрическую дифрагированную волну. Направление распространения этой волны в некоторых пределах зависит от звуковой частоты (от η). При этом возможно некоторое сканирование дифрагированной волны в плоскости, перпендикулярной плоскости дифракции.

В заключение отметим, что предлагаемый в данной статье метод позволяет решить в аналитической форме и более сложные задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Балакшиев В. И., Парыгин В. Н., Чирков Л. Е. Физические основы акустооптики. М., 1985. С. 61, 63. [2] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1978. С. 462, 795. [3] Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., 1962. С. 64.

Поступила в редакцию
05.08.87

УДК 539.04:535.375

КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА В α -КВАРЦЕ, ОБЛУЧЕННОМ МАЛЫМИ ДОЗАМИ РЕАКТОРНОГО И γ -ИЗЛУЧЕНИЯ

Л. П. Авакянц, Д. Ф. Киселев, М. М. Фирсова

(кафедра общей физики для физического факультета)

Использование новейших методик при исследовании комбинационного рассеяния света (КРС) в α -кварце, облученном малыми реакторными дозами, позволило разделить влияние нейтронной и γ -компоненты на его спектр и обнаружить небольшой сдвиг частот линий КРС.

При исследовании влияния реакторного облучения на динамику кристаллической решетки α -кварца возникают две задачи, решение которых невозможно найти в рамках традиционных методов КРС [1, 2] и рентгеноструктурного анализа [3]. Первая из них заключается в изучении воздействия на решетку малых реакторных потоков $\sim 10^{18}$ нейтрон/см², когда повреждения в ней еще малы и образование