

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.17.01

О СЛАБОСВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

В. В. Комаров, А. М. Попова, В. Г. Айрапетян

(НИИЯФ)

Предложен метод оценки числа слабосвязанных состояний оператора энергии системы двух квантовомеханических частиц во внешнем поле.

Изучение слабосвязанных состояний в системах нескольких квантовомеханических частиц не только представляет чисто академический интерес, но может найти также практическое применение в атомной и ядерной физике, физике твердого тела, квантовой химии. В настоящей работе мы рассматриваем простейшую многочастичную систему — систему двух частиц во внешнем поле — и показываем, что если взаимодействие частиц не обеспечивает их связанного состояния, то включение даже слабого внешнего поля может привести к образованию связанного состояния системы.

1. Гамильтониан изучаемой системы определим в виде

$$H = H_0 + V, \quad H_0 = H_{01} + H_{02} = H_{012} + h_{012}, \quad (1)$$

$$V = V_1 + V_2 + V_{12} = V_{1,2} + V_{12}.$$

Здесь H_{0i} — оператор кинетической энергии частицы i ($i=1, 2$), H_{012} — свободный гамильтониан внутреннего движения в подсистеме частиц 1 и 2, h_{012} — гамильтониан свободного движения их центра масс. Оператор V_i — потенциал взаимодействия частицы i с внешним полем, V_{12} — потенциал взаимодействия частиц между собой. Будем считать потенциалы $V_\alpha(x_\alpha)$ ($\alpha=1, 2, 12$) отрицательно определенными и такими, что

$$|V_\alpha(x_\alpha)| \leq C(1 + |x_\alpha|)^{-\gamma}, \quad (2)$$

где $\gamma > 2$, x_i — трехмерный радиус-вектор частицы i , $x_{12} = x_2 - x_1$. Если представить потенциалы V_α в виде $V_\alpha = bV_\alpha$, то ограничение (2) эквивалентно следующему: $b < b(2)$, где $b(2)$ — значение константы связи, при котором в канале α возможно образование связанных или виртуальных состояний.

Ограничение (2) таково, что $\sigma_{\text{disc}}(h_\alpha = H_{0\alpha} + V_\alpha) = (-\infty, 0)$, $\alpha=1, 2, 12$. Соответственно $\sigma_{\text{disc}}(H) = (-\infty, -\kappa_0)$, где $-\kappa_0 = \min_{\alpha} \{\sigma_{\text{disc}}(h_\alpha)\}$.

Возникает вопрос о характере $\sigma_{\text{disc}}(H)$ при условии, что $b < b(2)$, т. е. $\kappa_0 = 0$.

2. Для изучения спектральных свойств гамильтониана (1) будем пользоваться методом, развитым в работах [1, 2]. Запишем уравнение Шрёдингера для состояния с энергией z в виде

$$[H_0 + V_\alpha - z]\Psi = -V_\beta\Psi; \quad \alpha \neq \beta; \quad \alpha, \beta = (12), (1,2). \quad (3)$$

Перейдем от уравнения (3) к эквивалентной системе интегральных уравнений:

$$u_{\alpha} = A_{\alpha\beta}(z) u_{\beta}; \quad \alpha \neq \beta; \quad \alpha, \beta = (12), (1, 2), \quad (4)$$

где $u_{\alpha} = V_{\alpha} \Psi$, а $A(z)$ — матричный оператор с элементами

$$A_{\alpha\beta}(z) = -V_{\alpha} R_{\alpha}(z) (1 - \delta_{\alpha\beta}); \quad \alpha, \beta = (12), (1, 2).$$

Здесь $R_{\alpha}(z) = [H_0 + V_{\alpha} - z]^{-1}$ — резольвента оператора $H_0 + V_{\alpha}$. Ядра интегральных уравнений (4) совпадают с ядрами интегральных уравнений для амплитуд рассеяния системы двух частиц во внешнем поле, полученными в работе [3] в следующем виде:

$$A_{\alpha\beta}(z) = -t_{\alpha}(z) R_0(z) (1 - \delta_{\alpha\beta}); \quad \alpha, \beta = (12), (1, 2),$$

где $R_0(z) = [H_0 - z]^{-1}$, $t_{12}(z)$ — оператор рассеяния частиц в отсутствие внешнего поля, $t_{1,2}(z)$ — оператор независимого рассеяния частиц на поле. Эквивалентность этих двух форм записи ядер $A_{\alpha\beta}(z)$ следует из уравнений, которым удовлетворяют операторы $t_{\alpha}(z)$:

$$t_{\alpha}(z) = V_{\alpha} - V_{\alpha} R_{\alpha}(z) V_{\alpha}; \quad \alpha = (12), (1, 2).$$

Отметим, что ядра операторов $t_{\alpha}(z)$ при $b < b(2)$ являются гильбертовскими функциями своих переменных [3], ограниченными по норме, согласно предположению о потенциалах.

3. В этом разделе мы сначала покажем, что операторы $A_{\alpha\beta}(z)$ при $z=0$ принадлежат классу операторов со следом, т. е. $\text{Tr} |A_{\alpha\beta}(0)| < \infty$, а затем перейдем к оценке числа точек $\sigma_{\text{disc}}(H)$.

Лемма 1. Пусть в каждом из двухчастичных подсистем изучаемой системы $b < b(2)$. Тогда $\text{Tr} |A_{\alpha\beta}(0)| < \infty$.

Доказательство. Случай $\alpha = \beta$ тривиален: $A_{\alpha\alpha}(z) = 0$. В работе [2] предложен метод изучения асимптотического поведения ядер операторов, подобных $A_{\alpha\beta}(0)$ ($\alpha \neq \beta$), в координатном представлении. Применяя его в условиях леммы 1 и опуская громоздкие выкладки, получим

$$|A_{\alpha\beta}(x, y; x', y'; 0)| \sim \text{const} \cdot r^{-4}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Утверждение леммы теперь следует из (5) и из выражения для следа оператора через его ядро [4]. Лемма 1 доказана.

Перейдем к оценке $N\{\sigma_{\text{disc}}(H)\}$. Пусть оператор H имеет n точек дискретного спектра $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ на полуоси $(-\infty, -\kappa_0]$. В нашем случае, как указывалось выше, $\kappa_0 = 0$. Введем однопараметрическое семейство операторов $H(\tau)$, $\tau \in [0, 1] : H(\tau) = H_0 + \tau \sum_{\alpha} V_{\alpha}$; $\alpha = (12),$

$(1, 2)$. Свойства потенциалов V_{α} позволяют утверждать, что собственные значения оператора $H(\tau)$ являются аналитическими функциями $\tau \in [\tau_i^*, 1]$, где τ_i^* — значение параметра τ , при котором $\lambda_i(\tau_i^*) = -\kappa_0$. Система интегральных уравнений, аналогичная (4), запишется теперь в виде

$$u_{\alpha}(\tau_i^*) = A_{\alpha\beta}(\tau_i^*; -\kappa_0) u_{\beta}(\tau_i^*); \quad \alpha \neq \beta; \quad \alpha, \beta = (12), (1, 2), \quad (6)$$

где $A_{\alpha\beta}(\tau_i^*; -\kappa_0) = -t_{\alpha}(\tau_i^*; -\kappa_0) R_0(-\kappa_0) (1 - \delta_{\alpha\beta})$.

Свойство ограниченности по норме ядер операторов $t_{\alpha}(\tau_i^*; -\kappa_0)$, указанное в разделе 2, сохраняется при $\tau_i^* \in [0, 1]$, так как $-\kappa_0$ принадлежит резольвентному множеству операторов $h_{\alpha}(\tau_i^*) = H_{0\alpha} + \tau_i^* V_{\alpha}$.

Следовательно, операторы $A_{\alpha\beta}(\tau_i^*; -\kappa_0)$ можно симметризовать, для чего обозначим

$$T_{\alpha}(\tau_i^*; -\kappa_0) = |t_{\alpha}(\tau_i^*; -\kappa_0)|^{1/2}; \quad \tilde{T}_{\alpha}(\tau_i^*; -\kappa_0) = \text{sign}(t_{\alpha}) T_{\alpha}(\tau_i^*; -\kappa_0), \\ v_{\alpha}(\tau_i^*) = \tilde{T}_{\alpha}^{-1}(\tau_i^*; -\kappa_0) u_{\alpha}(\tau_i^*).$$

Система (6) в новых обозначениях имеет симметрические ядра:

$$v = \tilde{A}(\tau_i^*; -\kappa_0) v, \quad (7)$$

где v — вектор-функция с компонентами $\{v_{\alpha}(\tau_i^*)\}$, $\tilde{A}(\tau_i^*; -\kappa_0)$ — матричный оператор с элементами $\tilde{A}_{\alpha\beta}(\tau_i^*; -\kappa_0) = -T_{\alpha}(\tau_i^*; -\kappa_0) R_0(-\kappa_0) T_{\beta}(\tau_i^*; -\kappa_0) (1 - \delta_{\alpha\beta})$.

Лемма 2. При $\kappa_0 = 0$ и $\tau_i^* \rightarrow 1$ положительно определенные операторы $\tilde{A}_{\alpha\beta}(\tau_i^*; 0)$ монотонно возрастают по норме.

Утверждение леммы 2 следует из известного представления [3]:

$$t_{\alpha}(\tau_i^*; -\kappa_0) = \tau_i^* V_{\alpha} [1 - \tau_i^* V_{\alpha} R_0(-\kappa_0)]^{-1}; \quad \alpha = (12), (1, 2).$$

Теорема. $N\{\sigma_{\text{disc}}(H)\}$ при $b < b(2)$ равно числу собственных значений $\mu(\tau_i^* = 1)$ оператора $\tilde{A}(\tau_i^* = 1; 0)$, расположенных на полупрямой $[1, \infty)$.

Доказательство. Так как система (7) эквивалентна уравнению Шрёдингера (3), то число параметров τ_i^* , при которых оператор $\tilde{A}(\tau_i^*; 0)$ имеет собственные значения $\mu(\tau_i^*) = 1$, равно $N\{\sigma_{\text{disc}}(H)\}$. Матричный оператор $\tilde{A}(\tau_i^*; 0)$ положительно определен и монотонно возрастает по норме при $\tau_i^* \rightarrow 1$ (лемма 2). Значит, монотонно возрастает и функция $\mu(\tau_i^*)$. Если при некотором $\tau_i^* \in (0, 1)$ $\mu(\tau_i^*) = 1$, то при $\tau_i^* = 1$ $\mu(1) \geq 1$ заведомо. Теорема доказана.

Следствие 1. $n = N\{\sigma_{\text{disc}}(H)\}$ конечно.

Доказательство. Пронумеруем собственные значения оператора $\tilde{A}(1; 0)$, расположенные на $[1, \infty)$: $\mu_1 < \mu_2 < \dots$. Поскольку $\mu_j \geq 1$, то $n = \sum_{\mu_j \geq 1} 1 \leq \sum_j \mu_j$. Пользуясь соотношением [4] $\text{Tr } \tilde{A}(1; 0) = \sum_j \mu_j$ (с учетом кратности) и результатом леммы 1, непосредственно получаем доказательство.

Следствие 2. Если $\|\tilde{A}(1; 0)\| = 1$, то $\sigma_{\text{disc}}(H)$ состоит только из одной точки $\lambda = 0$.

Таким образом, проведенный анализ показал, что если в системе двух частиц нет связанных или виртуальных состояний, то включение даже слабого внешнего поля ($b < b(2)$) может привести к возникновению связанного состояния в системе. Следует ожидать, что с увеличением числа частиц в системе связанные состояния будут возникать при еще меньших константах связи, но детальное обсуждение этого вопроса выходит за рамки данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Комаров В. В., Попова А. М. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1985. 26, № 4. С. 21. [2] Komarov V. V., Popova A. M. Preprint ITF University of Helsinki, HU-TFT-86-46, 1986. [3] Комаров В. В., Попова А. М., Шаблов В. Л. // ЭЧАЯ. 1983. 14, № 2. С. 329. [4] Березин Ф. А., Шубин М. А. Уравнение Шрёдингера. М., 1983.

Поступила в редакцию
19.08.1987