УДК 538.574

О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В. Д. Гусев, Е. В. Петухова, Л. И. Приходько

(кафедра общей физики и волновых процессов)

На основе условия непересекаемости лучей предложен новый критерий применимости метода геометрической оптики в случайно-неоднородных средах. Полученное условие расширяет возможности метода при решении задач рассеяния.

Одним из важнейших методов решения различных задач по распространению волн в неоднородных средах является приближение геометрической оптики (ГО). Этот метод отличается простотой и наглядностью и во многих случаях обеспечивает хорошее количественное описание волновых явлений различной физической природы в условиях, когда длина волны мала по сравнению с характерными масштабами задачи a, т. е. в условиях медленности изменения свойств среды на длине распространяющейся волны λ [1]. Однако условия применимости метода, полученные на основе приближенного решения уравнений ГО, существенно ограничивают его возможности. С другой стороны, практика показывает, что метод ГО при решении задач рассеяния волн в случайно-неоднородных средах часто можно использовать даже в тех случаях, когда границы его применимости нарушаются [2]. Эти обстоятельства указывают на необходимость более глубокого анализа условий применимости метода ГО в случайно-неоднородных средах.

Будем рассматривать ГО как геометрическую теорию построения волновых поверхностей [3] $\Psi=k\varphi=\mathrm{const}$, где φ — эйконал, а геометрические световые лучи суть траектории, ортогональные к волновым поверхностям (фронтам). На основе этого подхода в работе предлагается критерий применимости метода ГО как условие непересекаемости лучей.

При подходе к ГО как к геометрической теории построения волновых поверхностей $\varphi=\mathrm{const}$ схема построения последних при распространении волны следующая. Если в какой-либо момент известен вид фронта волны, то следующая за ним волновая поверхность строится таким образом: в каждой точке волнового фронта возводится нормаль, на которой откладывается отрезок, равный фазовому пути. После соединения полученных точек имеем новый фронт волны и т. д. Очевидно, что такое построение будет однозначно задавать волновые поверхности, пока будет однозначное соответствие между точками предыдущей и последующей поверхностей, т. е. до тех пор, пока не пересекутся соседние нормали. Таким образом, условие непересечения нормалей или геометрических лучей и является условием применимости метода ГО.

Для получения критерия применимости ГО из условия непересечения лучей воспользуемся уравнением луча в форме

$$d\mathbf{p}/d\sigma=\nabla n, \tag{1}$$

где $\mathbf{p}=\nabla\varphi=n\mathbf{s}$ — волновой импульс, n — показатель преломления среды, $\mathbf{s}$ — единичный вектор, касательный к лучу, который является также нормалью к волновому фронту, $d\sigma$ — элемент длины луча. Это уравнение можно записать в интегральной форме, при этом для среды со средним значением показателя преломления, равным единице, оно принимает вид

$$\mathbf{p}=\mathbf{p}_0+\int_{\sigma_0}^{\sigma}\nabla\mu d\sigma', \tag{2}$$

где $\mathbf{p}_0$ — значение волнового импульса в точке выхода луча, μ — случайная часть показателя преломления среды. Полагая, что луч выходит из точки $(x_0, y_0, 0)$ в направлении оси z, и используя (1), можно найти координаты луча x и y при любом последующем z:

$$\begin{aligned} x &= x_0+\int_0^z\frac{p_x}{p_z}dz', \\ y &= y_0+\int_0^z\frac{p_y}{p_z}dz'. \end{aligned} \tag{3}$$

Координаты луча при заданном z являются функциями координат точки выхода x_0, y_0:

$$\begin{aligned} x&=\alpha(x_0, y_0), \\ y&=\beta(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{4}$$

Для однозначности решения (3) необходимо, чтобы через каждую точку (x, y) проходил только один луч, т. е. чтобы лучи не пересекались. Последнее будет иметь место, если для всякой кривой поля лучей во всякой точке внутри этого поля определитель [4]

$$\mathrm{Det}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\alpha}{\partial x_0} & \dfrac{\partial\alpha}{\partial y_0}\\[2ex] \dfrac{\partial\beta}{\partial x_0} & \dfrac{\partial\beta}{\partial y_0}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{5}$$

Таким образом, чтобы получить условие однозначности решения (3), нужно продифференцировать его по начальным данным, что равносильно внесению производной под знак интеграла. Учитывая это, вместо (5) получим

$$\begin{vmatrix}1+\displaystyle\int_0^z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_x}{p_z}\right)dz' & \displaystyle\int_0^z\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_x}{p_z}\right)dz'\\[3ex] \displaystyle\int_0^z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_y}{p_z}\right)dz' & 1+\displaystyle\int_0^z\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_y}{p_z}\right)dz'\end{vmatrix}\neq 0. \tag{6}$$

Условие (6) совместно с условием $ka\gg 1$ $(k=2\pi/\lambda)$ и определяет границы применимости метода ГО.

Рассмотрим действие условия (6) на простейшем примере распространения волн в среде с малыми флуктуациями показателя преломления μ: $\sqrt{\langle\mu^2\rangle}\ll 1$. В этом случае, разлагая в ряд по степеням малого параметра μ компоненты волнового импульса $\mathbf{p}$ и ограничиваясь членами первого порядка малости, (6) можно упростить:

$$\begin{vmatrix} 1+\int\limits_0^z \frac{\partial p_x}{\partial x}\,dz' & \int\limits_0^z \frac{\partial p_x}{\partial y}\,dz' \\ \int\limits_0^z \frac{\partial p_y}{\partial x}\,dz' & 1+\int\limits_0^z \frac{\partial p_y}{\partial y}\,dz' \end{vmatrix} > 0. \tag{7}$$

Определитель (7) должен быть больше нуля, поскольку в начальный момент $(x_0, y_0, 0)$ он равен единице, а в последующие отличен от нуля. С учетом сказанного из лучевого уравнения (1) можно найти

$$p_x=\int\limits_0^z \frac{\partial \mu}{\partial x}\,dz', \qquad p_y=\int\limits_0^z \frac{\partial \mu}{\partial y}\,dz'. \tag{8}$$

Подставляя далее (8) в (7) и раскрывая определитель, с точностью до членов первого порядка малости по μ найдем

$$1+\int\limits_0^z dz' \int\limits_0^z dz''\Delta_\perp\mu > 0. \tag{9}$$

Левую часть выражения (9) можно проинтегрировать по частям, тогда получим

$$1+\int\limits_0^L (L-z)\,\Delta_\perp\mu dz > 0, \tag{10}$$

где L — путь, пройденный лучом в случайно-неоднородной среде.

Для дальнейшего анализа условия (10) введем обозначение

$$\int\limits_0^L (L-z)\,\Delta_\perp\mu dz \equiv Q.$$

Поскольку Q является случайной величиной, принимающей различные значения, зависящие от флуктуаций μ и от длины трассы L, неравенство (10) должно быть выполнено только в вероятностном смысле. Если μ является нормальным процессом, то Q также распределено по нормальному закону. Пусть неравенство (10) выполняется с вероятностью $\mathscr{P}_0$. Такое требование к вероятности накладывает ограничение на дисперсию σ^2_Q. Если Q распределено по нормальному закону, то вероятность того, что оно принимает значения $Q>-1+\gamma$, где γ — некоторая положительная малая величина, определяется следующим образом:

$$\mathscr{P}\{Q>-1+\gamma\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Q}\int\limits_{-1+\gamma}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_Q^2}}\,dx. \tag{11}$$

Условие (11) равносильно уравнению для σ_Q

$$\Phi\left(\frac{1-\gamma}{\sigma_Q}\right)=2\mathscr{P}_0-1, \tag{12}$$

где Φ — интеграл ошибок. Из (12), отбрасывая γ, найдем, например, при $\mathscr{P}_0=0{,}98$

$$\sigma_Q<0{,}5. \tag{12'}$$

Таким образом, анализ условия (10) сводится к оценке величины дисперсии $\sigma^2{}_Q$, которая определяется интегралом

$$\sigma_Q^2=\langle Q^2\rangle=\int_0^L\int_0^L (L-z_1)(L-z_2)\,\Delta_{\perp 1}\Delta_{\perp 2}\rho_\mu(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)\,dz_1dz_2. \tag{13}$$

Этот интеграл в точности совпадает с интегралом, рассмотренным в [2, 5], и легко вычисляется. Для гауссовой функции корреляции неоднородностей он равен

$$\sigma_Q^2=\frac{8\sqrt{2\pi}}{3}\sigma_\mu^2\frac{L^3}{a^3}, \tag{14}$$

где $\sigma_\mu{}^2$ — дисперсия флуктуаций показателя преломления, a — размер случайных неоднородностей среды. Это выражение можно переписать в иной форме, если учесть, что дисперсия эйконала $\sigma_\varphi{}^2$ равна $\sigma_\varphi^2=\sqrt{2\pi}\,\sigma_\mu^2La$ и связана с дисперсией фазы соотношением $\sigma^2{}_\Psi=k^2\sigma_\varphi{}^2$. Тогда неравенство (12′) переходит в следующее ($\mathscr{D}$ – волновой параметр):

$$b\sigma_\Psi\mathscr{D}<1;\ \text{при этом}\ 1/b=\Phi^{-1}(2\mathscr{P}_0-1), \tag{15}$$

где Φ^{-1} — функция, обратная интегралу вероятности. Здесь числовой коэффициент b порядка единицы, его точное значение определяется заданием вероятности $\mathscr{P}_0$. В частности, при $\mathscr{P}_0=0{,}96$ $b=0{,}6$.

Неравенство (15) совместно с условием $ka\gg1$ и является критерием применимости метода ГО, вытекающим из условия однозначности задачи Коши построения волновых фронтов. Это условие является более слабым, чем аналогичные условия применимости, полученные другими способами (см., напр., [2, 5]). Поэтому оно расширяет возможности метода ГО. Указанные результаты подтверждаются экспериментальными данными [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М., 1978. [2] Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. М., 1980. [3] Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.-Л., 1937. [4] Вольф Э., Борн М. Основы оптики. М., 1978. С. 800—805. [5] Чернов Л. А. Волны в случайно-неоднородных средах. М., 1971. [6] Грачева М. Е., Гурвич А. С.//Изв. вузов. Радиофизика. 1965. 8, № 4. С. 717.

Поступила в редакцию
23.09.87