УДК 534.222.1

УЧЕТ МНОГОКРАТНЫХ РАССЕЯНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ: *Т*-МАТРИЧНЫЙ ПОДХОД

В. А. Буров, М. Н. Рычагов, А. В. Сасковец

(кафедра акустики)

Разработан алгоритм реконструкции рефракционной неоднородности по томографическим данным с учетом многократных рассеяний, что достигается введением итерационной процедуры решения уравнения Липпмана—Швингера для *Т*-матриц. Обсуждаются вопросы, связанные с интерполяцией данных в пространстве Фурье.

Как известно [1], при описании процесса распространения звуковых волн в среде с неоднородностями необходимо учитывать дифракционные и рефракционные эффекты. Это обстоятельство не позволяет использовать при разработке алгоритмов восстановления характеристик неоднородности предположение о прямолинейном распространении проникающего излучения, которое широко применяется в классической рентгеновской томографии. В дифракционной томографии (в частности, ультразвуковой) приходится решать волновую обратную задачу рассеяния (ОЗР), которая состоит в количественном описании рассеивателя на основании данных о рассеянии на нем известного первичного поля.

В [2] был предложен пертурбативный подход к решению квантовомеханических ОЗР, сущность которого состоит в восстановлении потенциала обращением борновского ряда для матрицы рассеяния, оцениваемой на энергетической поверхности. В дальнейшем этот подход продолжал развиваться [3—7]. Однако возможности его применения в задачах дифракционной томографии существенно ограничены требованием безызбыточности экспериментальных данных по отношению к количеству степеней свободы искомого потенциала и связанным с ним ограничением на область сходимости [8]. Так, в [4, 5] предлагается специальный отбор множества экспериментальных данных.

В данной работе описан итерационный алгоритм решения ОЗР скалярных волн на рефракционной неоднородности, в котором предусмотрена возможность обработки данных при наличии их избыточности — МНК-оценивание. Алгоритм позволяет учитывать многократные рассеяния падающего излучения на области рассеяния, а следовательно, высшие порядки теории возмущений. Алгоритм основан на использовании уравнения Липпмана — Швингера для *Т*-матрицы, элементы которой пропорциональны амплитудам плоских волн, рассеиваемым в различных направлениях, и могут регистрироваться экспериментально.

***Т*-матрица в случае рассеяния на неоднородности фазовой скорости звука.** Волновое уравнение при гармоническом возмущении среды с постоянной плотностью ρ_0 и скоростью звука $c=c(\mathbf{r})$ имеет вид [1]

$$\Delta(U(\mathbf{r})-U_0(\mathbf{r}))+|\mathbf{k}_0|^2(U(\mathbf{r})-U_0(\mathbf{r}))=\omega^2\xi(\mathbf{r})\,U(\mathbf{r}), \tag{1}$$

где $\mathbf{k}_0$ — волновой вектор падающего излучения, ω — циклическая частота, $\xi(\mathbf{r})$ — функция, описывающая неоднородность скорости звука:

$$\xi(\mathbf{r})=\begin{cases} 1/c_0^2-1/c^2(\mathbf{r}), & \text{если } \mathbf{r}\in\mathcal{R},\\ 0, & \text{если } \mathbf{r}\overline{\in}\mathcal{R},\end{cases} \tag{2}$$

c_0 — скорость звука в невозмущенной среде; $\mathcal{R}$ — область локализации неоднородности. Уравнение (1) можно рассматривать как уравнение рассеяния скалярных волн на неоднородности $\varepsilon(\mathbf{r})=\omega^2\xi(\mathbf{r})$, $\mathbf{r}\in\mathcal{R}$, в котором U — полное поле, а U_0 — первичное падающее поле.

Запишем уравнение рассеяния в интегральной форме:

$$U(\mathbf{y})=U_0(\mathbf{y})+\int\limits_{\mathcal{R}} g_0(\mathbf{y},\ \mathbf{r})\,\varepsilon(\mathbf{r})\,\{u(\mathbf{r})+U_0(\mathbf{r})\}\,d\mathbf{r}, \tag{3}$$

известное как уравнение Липпмана — Швингера [9]. В (3) введены обозначения: $U_0(\mathbf{r})$, $u(\mathbf{r})$ $(\mathbf{r}\in\mathcal{R})$ — распределение первичного и рассеянного полей на области рассеяния $\mathcal{R}$; $U(\mathbf{y})$, $U_0(\mathbf{y})$ $(\mathbf{y}\in\mathcal{Y})$ — распределение полного и первичного полей на области приема $\mathcal{Y}$; $g_0(\mathbf{y},\ \mathbf{r})$ — функция Грина уравнения (1) для однородного пространства.

Пусть рассеянное поле u измеряется в некоторой удаленной от $\mathcal{R}$ области $\mathcal{Y}$. Разлагая падающее и рассеянное поля по плоским волнам, уравнение рассеяния (3) можно записать в терминах операторов

$$T(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0)=\int\limits_{\mathcal{R}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\xi(\mathbf{r})\,U(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}, \tag{4}$$

переводящих плоскую падающую волну с волновым вектором $\mathbf{k}_0$ в плоскую рассеянную волну с волновым вектором $\mathbf{k}$:

$$T(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0)=\tilde{\xi}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)+\omega^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}_0(\mathbf{k}')\,T(\mathbf{k}',\ \mathbf{k}_0)\,\tilde{\xi}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\,d\mathbf{k}', \tag{5}$$

где $\tilde{g}_0(\mathbf{k}')$ — фурье-образ функции Грина, а

$$\tilde{\xi}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)=\int\limits_{\mathcal{R}}\xi(\mathbf{r})\,e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\mathbf{r}}\,d\mathbf{r}$$

— фурье-образ рассеивателя $\xi(\mathbf{r})$ в пространстве волновых векторов $\mathcal{L}$: $\mathbf{l}=\mathbf{k}-\mathbf{k}_0$, $\mathbf{k}\in\mathcal{K}$, $\mathbf{k}_0\in\mathcal{K}_0$, где $\mathcal{K}$ — пространство волновых векторов, характеризующих рассеянные волны, $\mathcal{K}_0$ — аналогичное пространство для падающих полей.

Уравнение (5) представляет собой уравнение Липпмана — Швингера, записанное для T-операторов. В дискретном случае оператор представляется T-матрицей соответствующей размерности, а уравнение (5) следует рассматривать в терминах T-матриц.

Пусть функция $\xi(\mathbf{r})$ принадлежит классу $\mathcal{L}_2$. Для фиксированного $\mathbf{k}_0$ определим функцию $T(\mathbf{r},\ \mathbf{k}_0)=\xi(\mathbf{r})U(\mathbf{r},\ k_0)$, которая описывает источники вторичного излучения на $\mathcal{R}$. Ясно, что $T(\mathbf{r},\ \mathbf{k}_0)$ финитна в пространстве координат. Из (4) следует, что $T(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0)$ при фиксированном $\mathbf{k}_0$ является образом Фурье $T(\mathbf{r},\ \mathbf{k}_0)$ и, следовательно, аналитична в $\mathcal{K}$-пространстве. Компоненты T-матрицы, которые принадлежат энергетической поверхности $(|\mathbf{k}|=|\mathbf{k}_0|)$, являются излучающими источниками рассеянного поля и могут регистрироваться в эксперименте.

Из (5) видно, что интеграл в правой части берется по всем значениям аргумента $\mathbf{k}$ и при использовании этого уравнения для решения прямых и обратных задач рассеяния необходима информация о значениях матричных элементов T-оператора для всех значений $\mathbf{k}$, а не только для доступных при измерениях в дальней зоне значений на энергетической поверхности. Поэтому оказывается необходимым строить итерационную процедуру решения (5), основанную на попеременной оценке $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ и $\xi(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)$ для всех значений $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$, либо более сложную процедуру, неявно содержащую такие оценки.

Итерационное восстановление рефракционной неоднородности. Будем рассматривать неоднородности, которые создают рассеянные поля, сравнимые по величине с падающим полем, но не превосходящие его во всех точках области $\mathcal{R}$, т. е.

$$\left| \frac{u(\mathbf{r})}{U_0(\mathbf{r})} \right| \leqslant 1 \qquad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}. \tag{6}$$

Борновское приближение, которое является частным случаем (5), когда в нем отсутствует интегральный член в правой части, в этом случае неприменимо. Запишем (5) в следующем виде:

$$\tilde{\xi}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) = T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) - \omega^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}_0(\mathbf{k}')\, T(\mathbf{k}', \mathbf{k}_0)\, \tilde{\xi}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\, d\mathbf{k}'. \tag{7}$$

Из (7) видно, что при решении задачи в борновском приближении образ Фурье $\xi(\mathbf{r})$ представляет собой набор данных, расположенных на окружностях радиуса $\mathbf{k}_0$ с центрами, смещенными на $-\mathbf{k}_0^s$ для каждого s-го направления излучения [8]. Вклад интегрального члена в (7) можно рассматривать как поправку, обусловленную учетом многократных рассеяний, т. е. всех элементов матрицы $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$, в том числе не лежащих на энергетической поверхности.

Используем метод последовательных приближений для реконструкции $\tilde{\xi}(\mathbf{l})$ на основании (5) и (7):

$$\begin{aligned}
&\tilde{\xi}_1(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) = T_э(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0), \quad |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0|,\\
&T_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \tilde{\xi}_1(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0), \quad \mathbf{k} \in \mathcal{K},\\
&\tilde{\xi}_2(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) = T_1(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) - \omega^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}_0(\mathbf{k}')\, T_1(\mathbf{k}', \mathbf{k}_0)\, \tilde{\xi}_1(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\, d\mathbf{k}',\\
&T_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \tilde{\xi}_2(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) + \omega^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}_0(\mathbf{k}')\, T_1(\mathbf{k}', \mathbf{k}_0)\, \tilde{\xi}_2(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\, d\mathbf{k}',\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&\tilde{\xi}_j(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) = T_{j-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) - \omega^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}_0(\mathbf{k}')\, T_{j-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}_0)\, \tilde{\xi}_{j-1}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\, d\mathbf{k}',\\
&T_j(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \tilde{\xi}_j(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) + \omega^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}_0(\mathbf{k}')\, T_{j-1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}_0)\, \tilde{\xi}_j(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\, d\mathbf{k}',
\end{aligned} \tag{8}$$

где $T_э(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ — экспериментально получаемые данные о рассеянии.

Запишем систему (8) для некоторого фиксированного $\mathbf{k}_0^s$, $s = 1, S$, где $S = M$(направлений)$\times F$(частот):

$$
\begin{cases}
\tilde{\xi}_j(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)=T^*_{j-1}(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0^s)-\omega^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}_0(\mathbf{k}',\ \omega_s)\,T_{j-1}(\mathbf{k}',\ \mathbf{k}_0^s)\,\tilde{\xi}_{j-1}(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\,d\mathbf{k}',\\
T_j(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0^s)=\tilde{\xi}_j(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)+\omega^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}_0(\mathbf{k}',\ \omega_s)\,T_{j-1}(\mathbf{k}',\ \mathbf{k}_0^s)\,\tilde{\xi}_j(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\,d\mathbf{k}'.
\end{cases}
\tag{9}
$$

В (9) $T_j(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0{}^s)$ — значения $T(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0)$, получаемые на этапе j-й итерации при замороженном индексе s; $T_{j-1}{}^*(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0{}^s)$ — значения $T_{j-1}(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0)$, скорректированные с учетом имеющихся экспериментальных данных. При выполнении (6) итерационный процесс (8)—(9) сходится к точному решению.

Фурье-образ $\xi(\mathbf{l})$ определен во всем $\mathscr{L}$-пространстве соответствующей размерности N (2- или 3-мерной в зависимости от физического содержания задачи). Аналитичность $\tilde{\xi}(\mathbf{l})$, определяемая финитным характером $\xi(\mathbf{r})$, позволяет, однако, ограничиться определением $\tilde{\xi}(\mathbf{l})$ на финитной подобласти $\mathscr{L}$-пространства размерности N. Областью определения $T(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0)$, доступной в волновом эксперименте, является пространство $\mathscr{K}^*=\mathscr{K}\otimes\mathscr{K}_0$, т. е. прямое произведение двух подобластей на сферах Эвальда размерности $N-1$, таким образом, $\dim\mathscr{K}^*=(N-1)^2$. При $N=3$ размерность области определения неизвестной функции $\xi(\mathbf{l})$ меньше размерности $\mathscr{K}^*$, что приводит к избыточности данных: каждой точке $\mathbf{l}=\mathbf{k}-\mathbf{k}_0$ области определения $\tilde{\xi}(\mathbf{l})$ отвечает континуальное множество возможных данных $T_э(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0)$. Существование такой избыточности должно учитываться либо на этапе сбора экспериментальных данных, либо в алгоритме их обработки. В предлагаемом алгоритме учет всей совокупности имеющихся данных осуществляется введением процедуры МНК-усреднения на каждом шаге дискретизованного варианта (8).

Необходимость дискретизации (8) объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, в практических приложениях сбор данных о $T_э(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0)$ производится на совокупности дискретных направлений волновых векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$. Во-вторых, использование ЭВМ для осуществления вычислительных операций также требует представления данных в дискретном виде.

Пусть область $\mathscr{R}$ дискретизована эквидистантной прямоугольной сеткой, в узлах которой, определяемых векторами $\mathbf{l}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}$, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_N$ — целые, заданы значения функции $\tilde{\xi}(\mathbf{l}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N})$. Тогда значения $\tilde{\xi}(\mathbf{l})$, соответствующие дискретным отсчетам на окружностях данных, могут быть получены использованием подходящей процедуры интерполяции [10]. Пусть Φ — интерполяционный оператор, тогда имеет место равенство

$$
\xi(\mathbf{l})=\Phi\xi(\mathbf{l}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}). \tag{10}
$$

В случае борновского приближения $\xi(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)=T_э(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0)$ для любого фиксированного $\mathbf{k}_0$ и, следовательно, (10) можно переписать в виде

$$
T_э(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0)=\Phi\tilde{\xi}(\mathbf{l}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N}). \tag{11}
$$

Отметим, что различным схемам сбора экспериментальных данных соответствуют не только различные конфигурации доступных окружностей $\mathbf{l}=\mathbf{k}-\mathbf{k}_0$ в $\mathscr{L}$-пространстве, но и различные интервалы дискретизации данных на самих окружностях — равномерные [11] и неравномерные [12], а значит, различный вид оператора Ф.

Приближенный (борновский) характер соотношения (11) делает его несовместным в случае большого количества измерений и высокой частоты дискретизации. Используя оператор $Ф^+$ — эрмитово сопряженный оператору Ф, получаем МНК-решение (11) относительно

$$\tilde{\xi}(\mathbf{l}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N})$$

в виде

$$\tilde{\xi}(\mathbf{l}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N}) = (\Phi^+\Phi)^{-1}\,\Phi^+ T_э(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0). \tag{12}$$

В (12) оператор $\Im = (\Phi^+\Phi)^{-1}\Phi^+$ является оператором интерполяции с круговых сеток данных на эквидистантную прямоугольную сетку, позволяющую эффективно использовать процедуру БПФ при вычислении свертки в (8) и (9).

При необходимости учета многократных рассеяний («неборновский» рассеиватель) действие оператора $\Im$ распространяется не только на исходные данные, но и на корректируемые в процессе итераций значения $T(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0)$; в этом случае (8) имеет в операторном представлении следующую форму:

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_j = \Im T^*_{j-1} - \omega^2 \tilde{g}_0 \Im T_{j-1} \tilde{\xi}_{j-1}, \\ T_j = \tilde{\xi}_j + \omega^2 \tilde{g}_0 \Im T_{j-1} \tilde{\xi}_j. \end{cases} \tag{13}$$

Таким образом, разработанная формальная процедура реконструкции неоднородности фазовой скорости звука, основанная на использовании аппарата T-матриц, позволяет учесть многократные рассеяния первичного поля на неоднородностях средней силы, допускает использование различных интерполяционных процедур, обусловленных разнообразием схем съема данных, и, что особенно важно, дает возможность полностью использовать все имеющиеся данные, в том числе и в случае их избыточности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Исакович М. А. Общая акустика. М., 1973. [2] Jost R., Kohn W.// //Phys. Rev. 1952. **87**, N **6**. P. 977. [3] Moses H.//Phys. Rev. 1956. **102**, N 2. P. 559. [4] Prosser R. T.//J. Math. Phys. 1976. **17**, N 10. P. 1775. [5] Prosser R. T.//J. Math. Phys. 1980. **21**, N 11. P. 2648. [6] Devaney A. J., Wolf E.//Phys. Lett. 1982. **89A**, N 6. P. 269. [7] Lu Z.//IEEE Trans. Ultrason, Ferroelectron. and Freq. Control. 1986. **33**, N 6. P. 722. [8] Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В., Тихонова Т. А.//Акуст. журн. 1986. **32**, № 4. С. 433. [9] Тейлор Дж. Теория рассеяния. М., 1975. [10] Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М., 1983. [11] Мюллер Р. К., Кавех М., Уэйд Г.//ТИИЭР. 1979. **67**, № 4. С. 146. [12] Nahamoo D., Pan S. X., Kak A. C.// //IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. 1984. **31**, N 4. P. 218.

Поступила в редакцию
28.10.87