КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145

КВАНТОВЫЙ ПРЕДЕЛ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ЭНЕРГИИ РЕЛАКСИРУЮЩЕГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Ю. И. Воронцов, И. В. Кобзарь

(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

Время релаксации осциллятора в процессе измерения энергии зависит от состояния прибора. Этим обусловливается принципиальный предел погрешности измерения энергии осциллятора.

Энергию консервативной системы можно измерить, в принципе, со сколь угодно малой погрешностью за конечное время (до релятивистских ограничений) [1]. Результатом точного измерения будет одно из собственных значений гамильтониана $\widehat{H}_0$ системы. Подобное измерение должно проводиться по принципу невозмущающего измерения энергии. Гамильтониан взаимодействия с прибором в этом случае равен $\alpha\widehat{H}_0\widehat{A}$, где $\widehat{A}$ — некоторый оператор прибора, α — коэффициент связи. В процессе невозмущающего измерения энергии осциллятора случайным образом изменяется его частота:

$$\widehat{\omega}(t)=\omega_0(1+\alpha\widehat{A}(t)) \tag{1}$$

и тем сильнее, чем меньше погрешность измерения [1]. Здесь $\widehat{\omega}(t)$ и $\widehat{A}(t)$ — операторы в картине Гейзенберга. Число квантов энергии остается неизменным. В случае измерения по такой схеме энергии релаксирующего осциллятора будет происходить случайное изменение не только частоты, но и времени релаксации. Цель данной работы — исследовать влияние релаксации на погрешность измерения энергии.

Гамильтониан неконсервативной системы можно представить в виде суммы гамильтониана консервативной системы $\widehat{H}_0$ и гамильтониана взаимодействия с внешними степенями свободы $\widehat{V}$. Под измерением энергии неконсервативной системы подразумевается измерение запасенной энергии $\widehat{H}_0$ (без учета энергии связи). Спектр собственных значений оператора $\widehat{H}_0$ не зависит от того, консервативна система или нет, но в неконсервативной системе $\widehat{H}_0$ не будет интегралом движения.

Характеристиками взаимодействия осциллятора с термостатом могут быть коэффициент трения (сопротивление R) и случайная сила $F(t)$, определяемая флуктуационно-диссипативной теоремой. Гамильтониан осциллятора, взаимодействующего с термостатом и с прибором, можно представить в следующем виде:

$$\widehat{H}=\widehat{H}_0+\alpha\widehat{H}_0\widehat{A}+\widehat{V}+\widehat{H}_a, \tag{2}$$

где $\widehat{H}_a$ — гамильтониан прибора.

Если измерения проводятся таким образом, что наблюдаемую A в течение времени измерения τ можно считать постоянной, то в картине Гейзенберга оператор обобщенной координаты $\widehat{q}(t)$ осциллятора будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2\widehat{q}}{dt^2}+\frac{\widehat{\omega}}{Q_0}\,\frac{d\widehat{q}}{dt}+\widehat{\omega}^2q=\frac{1}{\widehat{L}}\widehat{F}(t). \tag{3}$$

Здесь $Q_0=\omega_0L_0/R$ — добротность осциллятора, $1/\widehat{L}=(1+\alpha\widehat{A})/L_0$, L_0 — обобщенная масса, $\widehat{L}/R=\widehat{\tau}^*=\tau_0^*/(1+\alpha\widehat{A})$.

В этом случае можно использовать известное решение уравнения релаксации квантового осциллятора с постоянными параметрами [2]. Дисперсия числа квантов энергии осциллятора, находившегося в чистом n-состоянии, нарастает со временем при постоянном значении τ^* и $t \ll \tau^*$ по закону

$$(\Delta n)_R^2 \approx \frac{\omega t}{Q_0}(n + (2n+1)\, n_T), \tag{4}$$

где $n_T = [\exp(\hbar\omega/\varkappa T) - 1]^{-1}$ — равновесное число квантов, T — температура термостата, $\varkappa$ — постоянная Больцмана. Величина ω случайна, поскольку случайно значение A.

В случае, если частота зависит от времени, в соотношении (4) достаточно заменить ω на среднее по времени значение частоты $\bar{\omega}$.

Среднее по состоянию прибора значение дисперсии числа квантов в момент $t = \tau$ будет равно

$$\langle (\Delta n)_R^2 \rangle = \frac{\tau}{Q_0} \langle \bar{\omega} \rangle (n + (2n+1)\, n_T), \tag{5}$$

где $\langle \bar{\omega} \rangle$ есть среднее значение оператора $\hat{\bar{\omega}} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \hat{\omega}(t)\, dt$.

Погрешность измерения числа квантов энергии консервативного осциллятора связана с неопределенностью $\Delta\bar{\omega}$ частоты $\bar{\omega}$ [1]:

$$(\Delta n)_0 \geqslant \frac{1}{2\tau\Delta\bar{\omega}}. \tag{6}$$

Соотношение (6) является следствием соотношения неопределенностей наблюдаемой $\hat{A}$ и сопряженной ей наблюдаемой. Равенство в (6) может иметь место, если квантовое считывающее звено прибора (КСС) готовится в состоянии минимального произведения неопределенностей. В таком состоянии распределение A — гауссово. По определению $\omega > 0$, т. е. соотношение (1) справедливо только при $1 + \alpha A > 0$. Соответственно, распределение A не может быть строго гауссовым. Однако состояние КСС и в этом случае может быть близким к состоянию минимальной неопределенности. Нетрудно убедиться в том, что чем ближе к названному состояние КСС, тем сильнее неравенство $\langle \bar{\omega} \rangle > 2\Delta\bar{\omega}$. Поэтому $(\Delta n)_0 \gtrsim 1/\langle \bar{\omega} \rangle \tau$.

В случае осциллятора с потерями будет измерено не начальное значение n, а среднее за τ число квантов. Неопределенность этого среднего за счет релаксации с точностью до множителя порядка единицы будет равна (5). Погрешность оценивания начального и конечного значений $n(t)$ будет равна

$$\Delta n = [(\Delta n)_0^2 + \langle (\Delta n)_R^2 \rangle]^{1/2}. \tag{7}$$

Приняв во внимание условие $(\Delta n)_0 \gtrsim 1/\langle \bar{\omega} \rangle \tau$, из соотношений (5), (7) получим

$$(\Delta n)^2 \gtrsim \left(\frac{1}{\tau \langle \bar{\omega} \rangle}\right)^2 + \frac{\tau}{Q_0} \langle \bar{\omega} \rangle (n + (2n+1)\, n_T). \tag{8}$$

Правая часть в (8) имеет минимальное значение при

$$\langle \bar{\omega} \rangle \tau = [2Q_0/(n + (2n+1)\, n_T)]^{1/3}. \tag{9}$$

Таким образом, погрешность оценивания числа квантов будет удовлетворять соотношению

$$\Delta n \gtrsim \left[\frac{2(n + (2n+1)\, n_T)}{Q_0}\right]^{1/3}. \tag{10}$$

Этому соответствует погрешность оценивания запасенной энергии

$$\Delta H_0 = \Delta n \hbar \omega_0 \gtrsim \frac{\hbar}{\tau_0^*} [2Q_0^2 (n + (2n+1)\, n_T)]^{1/3}. \tag{11}$$

В соотношении (10), как и выше, отброшены дробные множители порядка единицы.

В случае $nQ_0 > 1$ при любой температуре

$$\Delta H_0 > \hbar/\tau_0^*. \tag{12}$$

Из (9) и (10) найдем, что

$$\Delta H_0 \geqslant \frac{\hbar}{\tau} \frac{2\omega_0}{\langle\bar{\omega}\rangle}. \qquad (13)$$

Следовательно, погрешность измерения ΔH_0 может быть меньше $\hbar/\tau$ только в том случае, если во время измерения $\langle\bar{\omega}\rangle > 2\omega_0$.

Соотношения (10)—(12) справедливы при условии, что в процессе измерения величина R не изменяется. В этом случае невозможно точно измерить начальное число квантов, невозможно приготовить осциллятор в состоянии с точно заданным n. Если бы время релаксации не изменялось в процессе измерения, такого предела погрешности измерения энергии не было бы [3].

Приготовить релаксирующий осциллятор в состоянии с определенным в некоторый момент времени значением n можно было бы в случае, если бы имелась возможность выключать потери (связь с нагрузкой) на время измерения. При $\tau^* = \infty$ число квантов может быть измерено точно. В момент включения потерь скачком меняется производная $i\hbar d\hat{H}_0/dt = [\hat{H}_0, \hat{V}]$, но наблюдаемая $\hat{H}_0$ остается непрерывной. Уменьшение потерь на время измерения облегчило бы также реализацию измерения, поскольку это дало бы возможность увеличить время измерения τ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Воронцов Ю. Н.//УФН. 1981. 133. С. 351. [2] Зельдович Б. Я., Переломов А. М., Попов В. С.//ЖЭТФ. 1968. 55. С. 589. [3] Брагинский В. Б., Халили Ф. Я. Препринт физ. фак. МГУ № 19/1987. М., 1987.

Поступила в редакцию
04.04.88

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 1

УДК 539.1.01

О НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ В ФОРМУЛИРОВКЕ ОТО НА «ПЛОСКОМ ФОНЕ»

А. А. Власов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Доказано на простом примере, что формулировка ОТО на «плоском фоне» не способна решить проблему энергии-импульса гравитационного поля.

В последнее время относительно широко распространилось мнение, что проблема энергии-импульса ОТО, отмеченная в работах [1—3], находит свое решение при использовании для подсчета интегральных величин ОТО фоновой плоской метрики, превращая с ее помощью стандартные псевдотензорные выражения ОТО в тензорные — так называемая формулировка ОТО на «плоском фоне», или двуметрический формализм ОТО (см., напр., [4, 5]), формализм разложения по фоновой метрике (см., напр., [6]); схожие идеи, но в неявной форме используют и авторы [7]. Поэтому имеет смысл еще раз вернуться к данному вопросу и показать несостоятельность подобного «решения» проблемы.

Действительно, коренная проблема ОТО — отсутствие интегральных законов сохранения, отсутствие ковариантного тензора энергии-импульса гравитационного поля и соответственно координатная зависимость интегральных значений энергии-импульса полной системы вещества и гравитационного поля даже для частного случая изолированного, островного распределения вещества — в формулировке ОТО на «плоском фоне» не исчезает, а просто принимает иную форму: в таком подходе соответствующие интегральные величины для энергии и импульса хотя и становятся координатно-независимыми, *но при этом приобретают калибровочную неинвариантность*, т. е. зависимость от произвольного, ничем не ограниченного в ОТО на «плоском фоне» выбора решений уравнений Гильберта—Эйнштейна среди некоторого их класса.

Поясним сказанное на простом примере. Пусть $\gamma_{ik} = \mathrm{diag}(1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2\theta)$ — метрика фонового пространства — пространства Минковского, где t —