ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 2

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12:531.51

ПРОБНЫЕ ПОЛЯ ВБЛИЗИ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО ГОРИЗОНТА СОБЫТИЙ

Д. В. Гальцов, М. Ю. Морозов

(кафедра теоретической физики)

Рассмотрены пробные статические скалярные и электромагнитные поля в пространстве де Ситтера. Получены точные решения уравнений для конформных полей. С помощью вектор-потенциала показано, что самодействие поля производит только перенормировку массы частицы.

В последнее время интенсивно изучается модель инфляционной Вселенной [1, 2], согласно которой на ранней стадии расширения материальные поля находились в квантовом состоянии, характеризуемом отрицательным давлением, по абсолютной величине равным плотности энергии $p=-\varepsilon$ (используется система единиц $G=c=\hbar=1$, метрика с сигнатурой $(+---)$). При таком состоянии вещества пространство-время описывается метрикой де Ситтера

$$ds^2=\frac{\Delta}{r^2}dt^2-\frac{r^2}{\Delta}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2),\quad \Delta=r^2\left(1-\frac{r^2}{r_c^2}\right). \tag{1}$$

Важную роль в наиболее популярной версии инфляционной модели играют скалярные поля, привлекаемые для реализации механизма спонтанного нарушения симметрии. При этом оказывается, что желаемый рост квантовых флуктуаций в процессе деситтеровского расширения, который можно привлечь для объяснения выхода из инфляционной стадии, дает безмассовое поле с минимальной связью. Вместе с тем, как отмечалось в [3], в поведении скалярного поля с минимальной связью в искривленном пространстве-времени имеются патологические черты уже на классическом уровне, например, соответствующая частица не движется по геодезической. Здесь мы хотим обратить внимание еще на одну особенность неконформного скалярного поля, которая имеет место в пространстве-времени, обладающем горизонтом событий. Оказывается, что «кулоновское» поле точечного источника безмассового скалярного поля с минимальной связью расходится на космологическом горизонте событий. В противоположность этому конформно-инвариантное безмассовое скалярное и электромагнитное поле точечных источников на космологическом горизонте событий регулярно. Мы покажем также, что сила самодействия, обусловленная деформацией кулоновского поля в искривленном пространстве-времени, для электромагнитного поля равна нулю.

Рассмотрим сначала безмассовое скалярное поле с минимальной связью, порождаемое точечным источником, покоящимся в начале статической системы отсчета $r=0$. Уравнение для такого поля имеет вид

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi=Q\delta(r)r^{-2}.$$

Его решение, имеющее кулоновский характер вблизи источника,

$$\Phi(r)=\frac{Q}{r}\left(1-\frac{r}{2r_c}\ln\frac{r_c+r}{r_c-r}\right)$$

логарифмически расходится на космологическом горизонте. При этом компонента тензора энергии-импульса $T_0^0 \backsim \frac{Q^2}{2r_c^4}\left(1-\frac{r^2}{r_c^2}\right)^{-1}$ также расходится. Аналогичную особенность имеет скалярное поле в пространстве Шварцшильда на горизонте событий.

Теперь рассмотрим статические конформно-инвариантные поля точечных источников в пространстве де Ситтера. Это можно сделать и в более общем случае источника в произвольной точке статической системы отсчета, которую без ограничения общности считаем лежащей на полярной оси. Тогда задача сводится к решению полевых уравнений для статических аксиально-симметричных конфигураций, которые удается найти, не прибегая к разделению переменных [4, 5], так как описывающее их уравнение Тюкольского [6] можно свести к обобщенному уравнению Пуассона в двумерном пространстве [7, 8] и получить решения в замкнутом виде для полей различного спина. Здесь мы распространим этот метод на случай пространства-времени де Ситтера.

Предварительно построим теорию аксиально-симметричных, не зависящих от времени возмущений методом функций Грина обобщенного уравнения Лапласа. Для метрики де Ситтера в статической системе отсчета (1) можно ввести изотропную тетраду Ньюмена — Пенроуза в виде

$$l^\mu=\frac{r^2}{\Delta}\delta_0^\mu+\delta_1^\mu,\quad m^\mu=\frac{1}{r\sqrt{2}}\left(\delta_2^\mu+\frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right),$$

$$n^\mu=\frac{1}{2}\delta_0^\mu-\frac{\Delta}{2r^2}\delta_1^\mu,\quad \overset{*}{m}{}^\mu=\frac{1}{r\sqrt{2}}\left(\delta_2^\mu-\frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right).$$

Ограничиваясь возмущениями, зависящими только от r и θ, для оператора Тюкольского (обозначения и общую теорию см. в [6]) получаем

$${}_s\Box=\Delta\mathcal{D}_1\mathcal{D}_s-2\frac{r^2}{r_c^2}(s-1)(2s-1)+\mathcal{L}_{1-s}\mathcal{L}_s,\quad s\geqslant 0,$$

где

$$\mathcal{D}_s=\Delta^{-s}\frac{\partial}{\partial r}\Delta^s,\quad \mathcal{L}_s=\sin^{-s}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^s\theta.$$

Введем вейлевские координаты

$$R=\frac{r_c}{x}(1-x^2)^{1/2}\sin\theta,\quad z=\frac{r_c}{x}\cos\theta,\quad x=\frac{r}{r_c}$$

и новую функцию

$${}_s\tilde{\psi}=x\left(\frac{\sin\theta}{x^2}\right)^{-s}{}_s\psi.$$

Тогда уравнение Тюкольского

$${}_s\Box\,{}_s\psi=-4\pi r^2\,{}_sT \tag{2}$$

будет иметь вид

$$\Delta_{(1+2s)}\,{}_s\tilde{\psi}=-4\pi r_c^2x^3\left(\frac{\sin\theta}{x^2}\right)^{1-s}R^{-1}J_sT, \tag{3}$$

где символом $\Delta_{(p)}$ обозначен обобщенный оператор Лапласа

$$\Delta_{(p)}=\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{p}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

а J — якобиан преобразования координат:

$$J=\frac{\partial(r,\ \theta)}{\partial(z,\ R)}=\frac{x^3(1-x^2)^{1/2}}{r_c(1-x^2\cos^2\theta)}.$$

Отыскание возмущений ${}_s\psi$ сводится, таким образом, к решению обобщенного уравнения Лапласа, зависящего от двух переменных z, R. Функция Грина уравнения (3) имеет следующее интегральное представление [6]:

$$G_{|s|}(z,\ R;\ z',\ R')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\mathcal{R}^{-(1+2|s|)}(y)\,(1-y^2)^{|s|-1/2}\,dy, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{R}(y)=[(z-z')^2+R^2+R'^2-2RR'y]^{1/2}.$$

Записывая решение уравнения (2) с помощью (4) и возвращаясь к переменным x, θ, получаем

$${}_{|s|}\psi=4\pi r_c^3\int G_{|s|}(z,\ R;\ z',\ R')\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^{|s|/2}(RR')^{|s|}\frac{x'}{x}\,{}_{|s|}T'\,dx'\,d(\cos\theta'), \tag{5}$$

где штрихи означают, что соответствующие величины берутся в точках x', θ'. Отметим также, что операторное тождество

$$\Delta_{(1+2s)}=R^{|s|-s}\Delta_{(1+2|s|)}R^{s-|s|}$$

и соотношение

$${}_{-|s|}\psi=\left(-\frac{\Delta}{2}\right)^{|s|}{}_{|s|}\psi \tag{6}$$

позволяют нам рассматривать все величины при $s\geqslant 0$.

Решение для пробного конформного скалярного поля с источником

$${}_0T=\frac{Q}{2\pi r^2}\,\delta(r-r_0)\,\delta(\cos\theta-1)\frac{ds}{dt}$$

получается непосредственно из (5):

$$\Phi(r,\ \theta)=\frac{Q}{r_c}(1-x_0^2)^{1/2}\,[(1-xx_0\cos\theta)^2-(1-x^2)(1-x_0^2)]^{-1/2}. \tag{7}$$

Из формулы (7) видно, что космологический горизонт событий не является «эквипотенциальной поверхностью» для поля $\Phi(r,\ \theta)$.

Обратимся к случаю электромагнитного поля. Комплексный вектор-потенциал A_μ, порождающий самодуальный тензор Максвелла $\mathcal{F}_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}+\frac{i}{2}\widetilde{F}_{\mu\nu}$, в лоренцевой калибровке $\left(A^\mu\sqrt{-g}\right)_{,\mu}=0$ можно построить, применяя метод потенциалов Дебая, изложенный в [6], с операторами $\mathcal{D}_s$ и $\mathcal{L}_s$, определенными на классе функций, зависящих только от r и θ. При этом

$$A_\mu={}_1\tau_\mu^{\star}\,{}_{-1}\Xi, \tag{8}$$

где

$$ {}_1\tau_0^{\star} = \frac{1}{\sqrt{2}\, r_c x}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\right), \quad {}_1\tau_3^{\star} = \frac{i}{\sqrt{2}} x^2 \sin\theta \frac{\partial}{\partial x} x^{-1}. \tag{9} $$

Дальнейшая задача состоит в отыскании потенциалов Дебая ${}_{-1}\Xi$ в области вне локализации источников по известным полевым функциям ${}_{-1}\psi$, найденным с помощью (5). Известно [6], что

$$ {}_{-1}\psi = \frac{1}{4}\mathscr{L}_0 \mathscr{L}_1\, {}_{-1}\Xi. $$

Обращение этой формулы приводит к выражению

$$ {}_{-1}\Xi = 4\mathscr{L}_1^{-1}\mathscr{L}_0^{-1}\, {}_{-1}\psi + {}_{-1}\widetilde{\Xi}, \tag{10} $$

где введены обратные операторы

$$ \mathscr{L}_1^{-1}\mathscr{L}_0^{-1} = \sin^{-1}\theta \int^{\theta} d\theta' \sin\theta' \int^{\theta'} d\theta''. $$

При интегрировании появляется неопределенная функция радиальной координаты x, которую следует выбирать так, чтобы построенный потенциал Дебая ${}_{-i}\Xi$ правильно воспроизводил скаляры ${}_{\pm 1}\psi$, а также соответствовал граничным условиям для искомых полей A_μ. Если первое слагаемое в (10) приводит к правильному решению для ${}_{-1}\psi$, то произвол переносится на ${}_{-1}\widetilde{\Xi}$. Последняя функция не должна изменять ${}_{-1}\psi$, а величина

$$ \Phi_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}\, r_c}\mathscr{D}_0 \mathscr{L}_1 x^{-1}\, {}_{-1}\Xi \tag{11} $$

должна приводить к правильному значению полного заряда в физической области. Это значение определяется из соотношения

$$ \oint\limits_{r>r_0} \Phi_1 r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = -2\pi e. \tag{12} $$

Пусть точечная заряженная частица удерживается в покое в точке $x = x_0$, $\cos\theta_0 = 1$. Тогда

$$ {}_1T = {}_1\tau_\mu j^\mu = -\frac{e}{\sqrt{2}\,\pi r_c^4} \frac{\delta(x - x_0)}{x^3} \frac{d}{d\theta}\delta(\cos\theta - 1). $$

Подставляя это выражение в (5), получаем с учетом соотношения (6)

$$ {}_{-1}\psi = -\frac{e}{2\sqrt{2}\, r_c} \frac{\Delta\Delta_0}{x^3 x_0^4} \frac{\sin\theta}{\mathscr{R}_0^3}, $$

где

$$ \mathscr{R}_0 = \frac{r_c}{x x_0}\left[(1 - x x_0\cos\theta)^2 - (1 - x^2)(1 - x_0^2)\right]^{1/2}, \quad \Delta_0 = r_c^2 x_0^2 (1 - x_0^2). $$

Потенциал Дебая ${}_{-1}\Xi$ строится с помощью легко проверяемого тождества

$$ \mathscr{L}_0 \mathscr{L}_1 \left(\frac{\mathscr{R}_0}{\sin\theta}\right) = -\frac{\Delta\Delta_0}{x^4 x_0^4} \frac{\sin\theta}{\mathscr{R}_0^3}. $$

Используя формулу (10), получаем

$$_{-1}\Xi=\frac{\sqrt{2}e}{r_c}\;\frac{x\mathscr{R}_0}{\sin\theta}. \tag{13}$$

Выражение (13) приводит к правильному значению полного заряда под космологическим горизонтом событий, которое следует из (11) и (12), при этом $_{-1}\widetilde{\Xi}$ можно опустить.

Использование операторов (9) позволяет получить значение комплексного вектор-потенциала A_μ [6]

$$A_0=\frac{e}{xx_0}(1-xx_0\cos\theta)\mathscr{R}_0^{-1}, \tag{14}$$

$$A_3=-\frac{ier_c}{xx_0}(x_0-x\cos\theta)\mathscr{R}_0^{-1}.$$

Этот вектор-потенциал порождает самодуальный тензор электромагнитного поля. Отметим, что A_0 в отличие от скалярного поля обращается в константу на космологическом горизонте событий, а выражение (14) является симметричным относительно замены $x\leftrightarrow x_0$. Такое поведение компоненты A_0 согласуется с теоремами об эквипотенциальности горизонтов событий, доказанных для черных дыр.

Зная выражение для A_0, можно определить электромагнитное самодействие, используя локальный метод, предложенный в работе [9]. Для этого строится локально-падающая система координат в точке $\mathscr{P}$, определяемая условиями

$$(g_{\bar\alpha\bar\beta})_{\mathscr{P}}=\eta_{\bar\alpha\bar\beta},\quad (\partial_{\bar\gamma}g_{\bar\alpha\bar\beta})_{\mathscr{P}}=0,$$

где $\eta_{\bar\alpha\bar\beta}$ — тензор Минковского, при этом для локальных координат имеем

$$x^{\bar\alpha}=(\Lambda^{\bar\alpha}_{\mu})_{\mathscr{P}}\left[(x-x_0)^\mu+\frac{1}{2}(\Gamma^\mu_{\nu\lambda})_{\mathscr{P}}(x-x_0)^\nu(x-x_0)^\lambda+\ldots\right],$$

а для матрицы $\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\mu}$ выполняется соотношение

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\bar\alpha\bar\beta}\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\bar\beta}{}_{\nu}.$$

Выбирая знаки у $\Lambda^{\bar\alpha}{}_{\mu}$ таким образом, чтобы ось $\bar x$ имела направление вдоль радиуса r по направлению к космологическому горизонту, получаем

$$\bar t=(1-x_0^2)^{1/2}t-\frac{x_0}{r_c(1-x_0^2)^{1/2}}t\,\Delta r,$$

$$\bar x=(1-x_0^2)^{-1/2}\Delta r+\frac{x_0}{2r_c(1-x_0^2)^{3/2}}\Delta r^2-\frac{x_0}{2r_c}(1-x_0^2)^{1/2}[t^2-r_c^2\theta^2], \tag{15}$$

$$\bar y=r_cx_0\theta+\theta\Delta r,\quad \bar z=r_cx_0\theta\Delta\varphi,\quad \Delta r=r-r_0.$$

Плотность внешней силы, измеряемой свободно-падающим наблюдателем для заряженной частицы с массой m_0, определяется выражением

$$G^{\bar\alpha}_{\mathrm{ext}}=T^{\bar\alpha\bar\beta}{}_{;\bar\beta},\quad T^{\bar\alpha\bar\beta}=T^{\bar\alpha\bar\beta}_{\mathrm{mech}}+T^{\bar\alpha\bar\beta}_{\mathrm{em}}, \tag{16}$$

где

$$T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}_{\text{mech}} = \frac{m_0}{\sqrt{-\bar{g}}} \int \frac{d\xi^{\bar{\alpha}}}{ds} \frac{d\xi^{\bar{\beta}}}{ds} \delta^4 (x^{\bar{\gamma}} - \xi^{\bar{\gamma}}(s))\, ds, \tag{17}$$

$$T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}_{\text{em}} = \frac{1}{4\pi} (F^{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} F^{\bar{\beta}}_{\cdot\bar{\gamma}} - g^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} F^{\bar{\gamma}\bar{\delta}} F_{\bar{\gamma}\bar{\delta}}), \quad F_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = A_{\bar{\nu},\bar{\mu}} - A_{\bar{\mu},\bar{\nu}}. \tag{18}$$

Интегрируя выражение (16) по бесконечно малому трехмерному объему в локальных координатах при $\bar{t}=0$, получаем для силы

$$F^{\bar{x}}_{\text{ext}} = \lim_{\bar{\varepsilon}\to 0} \left\{ \int\limits_{\bar{r}\leqslant\bar{\varepsilon}} \left[\frac{\partial}{\partial\bar{t}} T^{\bar{x}\bar{0}}_{\text{mech}} + \frac{\partial}{\partial\bar{t}} T^{\bar{x}\bar{0}}_{\text{em}} \right]_{\bar{t}=0} d^3\bar{x} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\bar{r}=\bar{\varepsilon}} [T^{\bar{x}\bar{j}}_{\text{mech}} + T^{\bar{x}\bar{j}}_{\text{em}}]_{\bar{t}=0}\, d^2 S_{\bar{j}} + \int\limits_{\bar{r}\leqslant\bar{\varepsilon}} [O(x^{\bar{\alpha}} T^{\bar{\beta}\bar{\gamma}})]_{\bar{t}=0}\, d^3\bar{x} \right\}. \tag{19}$$

Используя (15), можно найти закон движения точечной частицы в локально-падающей системе отсчета

$$\xi^{\bar{\alpha}}(s) = \left(s,\ -\frac{x_0}{2r_c}(1-x_0^2)^{-1/2} s^2,\ 0,\ \varphi_0\right).$$

Подставляя эти значения в формулу (17) и используя (19), получаем для силы, удерживающей частицу в покое в системе координат (1), выражение

$$F^{\bar{x}}_{\text{mech}} = -\frac{m_0}{r_c} \frac{x_0}{(1-x_0^2)^{1/2}}. \tag{20}$$

Чтобы вычислить силу электромагнитного самодействия, преобразуем вектор-потенциал A_0 в локально-падающую систему координат с помощью (15), при этом

$$A_{\bar{0}} = \frac{e}{|x^{\bar{k}} - X^{\bar{k}}(\bar{t})|} \left(1 + \frac{x_0}{2r_c(1-x_0^2)^{1/2}}\bar{x}\right),$$

$$A_{\bar{i}} = \frac{e}{|x^{\bar{k}} - X^{\bar{k}}(\bar{t})|} \frac{x_0}{r_c(1-x_0^2)^{1/2}} \bar{t}\delta_{\bar{i}\bar{x}}.$$

Подставляя $A_{\bar{0}}$ и $A_{\bar{i}}$ в (18) и используя (19), получаем

$$F^{\bar{x}}_{\text{em}} = -\delta m_0 \frac{x_0}{r_c(1-x_0^2)^{1/2}}, \tag{21}$$

где

$$\delta m_0 = \frac{2}{3} e^2 \lim_{\bar{\varepsilon}\to 0} \left[\frac{1}{\bar{\varepsilon}} + \int\limits_0^{\bar{\varepsilon}} \frac{d\bar{r}}{\bar{r}^2} \right].$$

Из выражений (20) и (21) видно, что в пространстве де Ситтера конечная сила самодействия, связанная с деформацией электромагнитного поля, равна нулю. Электромагнитный вклад производит только перенормировку массы m_0. Отсутствие конечного вклада в самодействие связано с тем, что конформное электромагнитное поле рассматривается в пространстве, являющемся конформным риндлеровскому пространству. Заметим, что F^{x}_{mech} не имеет ньютоновского вида при достаточном удалении частицы от горизонта событий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Guth A. H.//Phys. Rev. 1981. **D23**. P. 347. [2] Линде А. Д.//УФН. 1984. **144**. С. 177. [3] Chernikov N. A., Tagirov E. A.//Ann. Inst. H. Poincare, 1968. **9A**. P. 109. [4] Linet B.//Phys. Lett. 1977. **60A**. P. 395. [5] Linet B.//J. Phys. A. 1979. **12**. P. 839. [6] Гальцов Д. В. Частицы и поля в окрестности черных дыр. М., 1986. [7] Weinstein A.//Trans. Amer. Math. Soc. 1948. **63**. P. 342. [8] Weinstein A.//Bull. Amer. Math. Soc. 1953. **59**. P. 20. [9] Smith A. G., Will C. M.// //Phys. Rev. 1980. **D22**. P. 1276.

Поступила в редакцию
26.10.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 2

УДК 517.958:532.5

МЕЛКАЯ ФЛОТИРУЮЩАЯ ВОДА И УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА—ДЕ ФРИЗА

С. А. Габов

(кафедра математики)

Изучаются слабо нелинейные волны на поверхности мелкой флотирующей жидкости. На основе метода лагранжевых приближений показано, что эти волны могут быть описаны уравнением Кортевега—де Фриза.

1^0. **Введение.** В настоящей работе продолжаются исследования, связанные с изучением динамики флотирующей жидкости и начатые в работах [1]. Поясним термин «флотирующая жидкость». Рассмотрим идеальную несжимаемую жидкость, ограниченную свободной поверхностью и имеющую конечную или бесконечную глубину. Предположим, что на свободной поверхности жидкости плавают весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебаний жидкости друг с другом не взаимодействуют или их взаимодействие пренебрежимо мало. Такая ситуация с физической точки зрения возникает, например, когда мы имеем дело с очисткой или обогащением минерального сырья с помощью известной технической процедуры, называемой флотацией, или при наличии на свободной поверхности плавающей ледовой крошки. С динамической же точки зрения наличие плавающих невзаимодействующих частиц на свободной поверхности можно интерпретировать, рассматривая эту поверхность как весомую поверхность с поверхностной плотностью распределения массы σ, причем $\sigma \geqslant 0$ и как функция точек свободной поверхности может обращаться тождественно в нуль в некоторых частях этой поверхности.

Жидкость с весомой свободной поверхностью и называется флотирующей жидкостью.

Основной целью настоящей работы является рассмотрение вопросов математического моделирования длинных слабо нелинейных волн, распространяющихся по поверхности «мелкой» флотирующей жидкости. Ниже мы дадим вывод приближенных нелинейных уравнений, описывающих процессы распространения этих волн.

2^0. **Точные уравнения.** Рассмотрим идеальную несжимаемую флотирующую жидкость глубины h_0, совершающую потенциальные движения,