в пространстве, являющемся конформным риндлеровскому пространству. Заметим, что $F^x_{\rm mech}$ не имеет ньютоновского вида при достаточном удалении частицы от горизонта событий.


## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Guth A. H.//Phys. Rev. 1981. **D23**. P. 347. [2] Линде А. Д.//УФН. 1984. **144**. С. 177. [3] Chernikov N. A., Tagirov E. A.//Ann. Inst. H. Poincare, 1968. **9A**. P. 109. [4] Linet B.//Phys. Lett. 1977. **60A**. P. 395. [5] Linet B.//J. Phys. A. 1979. **12**. P. 839. [6] Гальцов Д. В. Частицы и поля в окрестности черных дыр. М., 1986. [7] Weinstein A.//Trans. Amer. Math. Soc. 1948. **63**. P. 342. [8] Weinstein A.//Bull. Amer. Math. Soc. 1953. **59**. P. 20. [9] Smith A. G., Will C. M.// //Phys. Rev. 1980. **D22**. P. 1276.



Поступила в редакцию
26.10.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 2

УДК 517.958:532.5


# МЕЛКАЯ ФЛОТИРУЮЩАЯ ВОДА И УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА—ДЕ ФРИЗА


**С. А. Габов**

*(кафедра математики)*



**Изучаются слабо нелинейные волны на поверхности мелкой флотирующей жидкости. На основе метода лагранжевых приближений показано, что эти волны могут быть описаны уравнением Кортевега—де Фриза.**


$1^0$. **Введение.** В настоящей работе продолжаются исследования, связанные с изучением динамики флотирующей жидкости и начатые в работах [1]. Поясним термин «флотирующая жидкость». Рассмотрим идеальную несжимаемую жидкость, ограниченную свободной поверхностью и имеющую конечную или бесконечную глубину. Предположим, что на свободной поверхности жидкости плавают весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебаний жидкости друг с другом не взаимодействуют или их взаимодействие пренебрежимо мало. Такая ситуация с физической точки зрения возникает, например, когда мы имеем дело с очисткой или обогащением минерального сырья с помощью известной технической процедуры, называемой флотацией, или при наличии на свободной поверхности плавающей ледовой крошки. С динамической же точки зрения наличие плавающих невзаимодействующих частиц на свободной поверхности можно интерпретировать, рассматривая эту поверхность как весомую поверхность с поверхностной плотностью распределения массы $\sigma$, причем $\sigma \geqslant 0$ и как функция точек свободной поверхности может обращаться тождественно в нуль в некоторых частях этой поверхности.

Жидкость с весомой свободной поверхностью и называется флотирующей жидкостью.

Основной целью настоящей работы является рассмотрение вопросов математического моделирования длинных слабо нелинейных волн, распространяющихся по поверхности «мелкой» флотирующей жидкости. Ниже мы дадим вывод приближенных нелинейных уравнений, описывающих процессы распространения этих волн.

$2^0$. **Точные уравнения.** Рассмотрим идеальную несжимаемую флотирующую жидкость глубины $h_0$, совершающую потенциальные движения, поле скоростей которых равно $\mathbf{v}=\nabla\Phi$, где $\Phi$ — потенциал скоростей, являющийся гармонической функцией во внутренних точках области, занимаемой жидкостью. Ограничимся рассмотрением плоских движений, которое отнесем к системе координат $(x, z)$, причем ось $Oz$ направим вертикально вверх. Выведем динамическое граничное условие на свободной поверхности жидкости, которую обозначим через $S$. Кинематическое условие для флотирующей жидкости остается тем же, что и для жидкости с обычной свободной поверхностью [2].

Рассмотрим элемент единичной площади весомой свободной поверхности и запишем для него второй закон Ньютона:

$$\sigma\mathbf{a}=\mathbf{n}(p-p_0)+\sigma\mathbf{g}, \tag{1}$$

где $\mathbf{a}$ — ускорение, $p$ — давление в жидкости на свободной поверхности, $p_0$ — внешнее атмосферное давление, которое будем считать постоянным, $\sigma$ — поверхностная плотность флотирующего вещества, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к $S$ и $\mathbf{g}=(0, -g)$ — ускорение силы тяжести. Умножив (1) скалярно на $\mathbf{n}$, получим

$$\sigma\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=p-p_0+\sigma\mathbf{g}\cdot\mathbf{n}. \tag{2}$$

Используя известные равенства теории потенциальных движений жидкости [2, 3]:

$$\mathbf{a}=\mathbf{v}_t+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=\nabla\left(\Phi_t+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right),$$

а также интеграл Бернулли

$$\Phi_t+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2+gz|_S=-p|_S+C(t),$$

из соотношения (2) получим динамическое граничное условие на свободной поверхности флотирующей жидкости:

$$\sigma\frac{\partial}{\partial n}\left(\Phi_t+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right)+\Phi_t+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2+g\eta+\frac{\sigma g}{\sqrt{1+\eta_x^2}}-\sigma g=0. \tag{3}$$

Здесь $z=\eta(x, t)$ — уравнение свободной поверхности $S$. Заметим, что при записи интеграла Бернулли и в дальнейшем плотность жидкости считается равной единице, а константа $C(t)$ выбрана равной $C(t)=p_0+\sigma g$. Кроме того, будем считать, что $\sigma=\mathrm{const}$.

Теперь мы можем записать полную совокупность уравнений и граничных условий, описывающих плоские движения флотирующей жидкости над горизонтальным дном $z=0$. Всюду в слое жидкости $0<z<\eta(x, t)$, $-\infty<x<+\infty$, потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi=0. \tag{4}$$

На горизонтальном дне $z=0$ выполнено условие непротекания:

$$\Phi_z(x, 0; t)=0. \tag{5}$$

На свободной поверхности $S: z=\eta(x, t)$ выполняются два условия: динамическое (3) и кинематическое [2, 3]:

$$\eta_t+\eta_x\Phi_x-\Phi_z|_{z=\eta(x,t)}=0. \tag{6}$$

$3^0$. **Безразмерные переменные.** Введем следующие безразмерные параметры: $\alpha=a/h_0$, $\beta=h^2{}_0/l^2$. Здесь $a$ — характерная амплитуда волн на свободной поверхности, $l$ — их характерная длина, а $h_0$ — средняя глубина жидкости. Перейдем теперь к безразмерным переменным:

$$x/l,\ z/h_0,\ t\sqrt{gh_0}/l,\ (\eta-h_0)/a,\ \Phi\sqrt{gh_0}/(gal)$$

и сохраним для них прежние обозначения $x$, $z$, $t$, $\eta$ и $\Phi$.

Уравнения и граничные условия (3)—(6) в терминах новых переменных переписываются следующим образом:

$$\beta\Phi_{xx}+\Phi_{zz}=0,\quad 0<z<1+\alpha\eta,\ -\infty<x<+\infty, \tag{7}$$

$$\Phi_z|_{z=0}=0, \tag{8}$$

$$\eta_t+\alpha\Phi_x\eta_x-\frac{1}{\beta}\Phi_z=0 \quad \text{при } z=1+\alpha\eta, \tag{9}$$

$$\mu\left(L_z-\alpha\beta\eta_xL_x+\frac{1}{\alpha}\right)(1+\alpha^2\beta\eta_x^2)^{-1/2}-\frac{\mu}{\alpha}+L+\eta=0 \text{ при } z=1+\alpha\eta. \tag{10}$$

Здесь $\mu=\sigma/h_0$, а через $L_x$ и $L_z$ обозначены частные производные величины

$$L=\Phi_t+\frac{1}{2}\alpha\Phi_x^2+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\Phi_z^2.$$

Отметим, что безразмерные переменные и параметры $\alpha$ и $\beta$ выбраны такими же, как и в классической теории [2].

$4^0$. **Лагранжевы приближения.** Для построения приближенных уравнений, отвечающих уравнениям (7)—(10), воспользуемся методом лагранжевых приближений. Обоснование справедливости этого метода для некоторых достаточно общих ситуаций содержится в [3].

Согласно основной идее этого метода, решение уравнения Лапласа (7), удовлетворяющее (8), может быть представлено в виде

$$\Phi=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\beta^m\frac{z^{2m}}{(2m)!}\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}f(x,\ t), \tag{11}$$

где $f(x,\ t)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая по $x$ функция.

Подставляя (11) в граничные условия (9)—(10) и полагая $z=1+\alpha\eta$, получим

$$\eta_t+\frac{\partial}{\partial x}[(1+\alpha\eta)f_x]-\beta\left[\frac{1}{6}(1+\alpha\eta)^3f_{4x}+\frac{\alpha}{2}(1+\alpha\eta)^2\eta_xf_{3x}\right]+$$
$$+O(\beta^2)=0, \tag{12}$$

$$f_t+\eta+\frac{\alpha}{2}f_x^2+\frac{\beta}{2}(1+\alpha\eta)^2[\alpha f_{xx}^2-f_{xxt}-\alpha f_xf_{3x}]-\beta\mu\Big[\alpha\eta_x(f_{xt}+\alpha f_xf_{xx})+$$
$$+(1+\alpha\eta)(f_{xxt}+\alpha f_xf_{3x}-\alpha f_{xx}^2)-\frac{\alpha}{2}\eta_x^2\Big]+O(\beta^2)=0. \tag{13}$$

Здесь $f_{nx}=\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}f(x,\ t)$ и символ $O(\beta^2)$ обозначает члены, содержащие $\beta$ во второй и более высоких степенях.

$5^0$. **Уравнения мелкой воды и уравнения Буссинеска.** Предположим, что выполнено условие «мелкой воды»: $\beta=h^2{}_0/l^2\ll 1$, т. е. глубина жидкости много меньше длины распространяющихся по поверхности жидкости волн. Пренебрегая в (12)—(13) членами первого и более высоких порядков по $\beta$, получим

$$\begin{aligned}&\eta_t+[(1+\alpha\eta)f_x]_x=0,\\&\eta+f_t+\frac{1}{2}\alpha f_x^2=0.\end{aligned}\tag{14}$$

Из (11) следует, что в рассматриваемом приближении $\Phi=f(x, t)$ и тем самым $f_x=\Phi_x=u(x, t)$, где $u$ — безразмерная горизонтальная компонента вектора скорости частиц жидкости. Дифференцируя второе уравнение в (14) по $x$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}&\eta_t+[(1+\alpha\eta)u]_x=0,\\&u_t+\alpha uu_x+\eta_x=0,\end{aligned}\tag{15}$$

которая носит название уравнений мелкой воды [3, 4]. Здесь она записана в безразмерном виде.

В записи системы (15) отсутствует параметр $\mu$ и тем самым в рассматриваемом приближении флотационные эффекты не проявляют себя.

Вернемся вновь к уравнениям (12)—(13) и предположим так же, как и в теории жидкости с обычной, невесомой свободной поверхностью [2], что параметры $\alpha$ и $\beta$ являются малыми одного порядка малости, т. е. $\alpha=O(\beta)$ и $\beta\ll1$. Если сохранить в (12)—(13) члены первого порядка по $\beta$ и опустить члены более высоких порядков, то уравнения (12)—(13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&\eta_t+[(1+\alpha\eta)u]_x-(\beta/6)u_{xxx}=0,\\&u_t+\alpha uu_x+\eta_x-\beta(\mu+1/2)u_{xxt}=0.\end{aligned}\tag{16}$$

Здесь мы уже выполнили преобразование $u=f_x(x, t)$. Рассмотренное приближение носит название приближения Буссинеска [2] и поэтому систему (16) естественно назвать *системой уравнений Буссинеска для флотирующей жидкости*. Эта система описывает слабо нелинейные волны малой амплитуды на мелкой воде.

$6^0$. **Уравнение КдФ.** Получим теперь из системы уравнений Буссинеска (16) уравнение, описывающее волны, распространяющиеся только вправо. Так как система (16) получена с точностью до членов порядка $O(\alpha^2+\beta^2)$, то ее решения, описывающие волны, распространяющиеся вправо, естественно искать с тем же порядком точности. Будем искать их в виде

$$u=A_0(\eta)+\alpha A_1(\eta)+\beta B_1(\eta)+O(\alpha^2+\beta^2),\tag{17а}$$

$$\eta_t+\eta_x=\alpha C_1(\eta)+\beta C_2(\eta)+O(\alpha^2+\beta^2),\tag{17б}$$

где $A_i(\eta)$, $B_1(\eta)$ и $C_i(\eta)$ — некоторые функции, зависящие от функции $\eta$ и ее производных.

Подставив (17а) в систему Буссинеска (16), получим

$$\begin{aligned}&\eta_t+(A_0)_x+\alpha[(\eta A_0)_x+(A_1)_x]+\beta[(B_1)_x-(1/6)(A_0)_{xxx}]+O(\alpha^2+\beta^2)=0;\\&(A_0)_t+\eta_x+\alpha[(A_1)_t+A_0(A_0)_x]+\beta[(B_1)_t-(\mu+1/2)(A_0)_{xxt}]+\\&+O(\alpha^2+\beta^2)=0.\end{aligned}\tag{18}$$

Уравнения (18) представляют собой два уравнения для одной функции $\eta$. Выясним, когда они совместны.

Рассматривая члены нулевого порядка по $\alpha$ и $\beta$ в (18), убеждаемся, что $A_0(\eta)=\eta$ и уравнениям можно придать вид

$$\begin{aligned}&\eta_t+\eta_x+\alpha[(A_1)_x+2\eta\eta_x]+\beta[(B_1)_x-(1/6)\eta_{xxx}]=0,\\ &\eta_t+\eta_x+\alpha[(A_1)_t+\eta\eta_x]+\beta[(B_1)_t-(\mu+1/2)\eta_{xxt}]=0.\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь мы уже отбросили члены порядка $O(\alpha^2+\beta^2)$. Далее, поскольку, как следует из (17а), $\eta_t=-\eta_x+O(\alpha+\beta)$, то производные по $t$ в членах первого порядка по $\alpha$ и $\beta$ можно заменить производными по $x$ с противоположным знаком. Учитывая это, легко видеть, что (19) совместны, если $A_1(\eta)=-\eta^2/4$, $B_1(\eta)=(1/2)(\mu+2/3)\eta_{xx}$, при этом каждое из уравнений (19) принимает вид

$$\eta_t+\eta_x+\frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x+\frac{\beta}{2}\left(\mu+\frac{1}{3}\right)\eta_{xxx}=0 \tag{20}$$

и тем самым $C_1(\eta)=-(3/2)\eta\eta_x$, $C_2(\eta)=-(1/2)(\mu+1/3)\eta_{xxx}$.

Таким образом, решения системы уравнений Буссинеска, которые описывают бегущие вправо волны, удовлетворяют уравнению (20) и соотношению (17а), которое при найденных $A_0$, $A_1$ и $B_1$ принимает вид $u=\eta-(1/4)\alpha\eta^2+(1/2)\beta(\mu+2/3)\eta_{xx}$.

Уравнение (20) носит название уравнения Кортевега — де Фриза (сокращенно КдФ). Запишем его в размерных переменных:

$$\zeta_t+c_0\left(1+\frac{3}{2}\frac{\zeta}{h_0}\right)\zeta_x+c_0\left(\frac{h_0^2}{6}+\frac{\sigma h_0}{2}\right)\zeta_{xxx}=0. \tag{21}$$

Здесь $\zeta=\eta-h_0$ — возвышение волн над невозмущенным уровнем $z=h_0$, $c_0=\sqrt{gh_0}$ — скорость распространения линейных длинных волн [2, 4].

Таким образом, подводя итог изложенному выше, можно утверждать, что слабо нелинейные длинные волны малой амплитуды на поверхности «мелкой флотирующей воды» могут быть приближенно описаны либо системой уравнений Буссинеска (16), либо уравнением КдФ. Последнее обстоятельство оказывается чрезвычайно благоприятным, поскольку в настоящее время уравнение КдФ является одним из наиболее изученных эволюционных нелинейных уравнений. Исследованию свойств и решений этого уравнения посвящена обширная литература (см. по этому поводу, напр., [6]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Габов С. А.//Дифф. уравнения. 1988. **24**, № 1. С. 16. [2] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., 1977. [3] Овсянников Л. В.//Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск, 1985. [4] Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М., 1977. [5] Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. М., 1985.

Поступила в редакцию
30.10.87