

УДК 530.145

НЕВОЗМУЩАЮЩИЕ ИЗМЕРЕНИЯ И КОНТРОЛЬ НАБЛЮДАЕМЫХ

Ю. И. Воронцов

(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

Показано, что 1) условия невозмущающего измерения в задачах обнаружения воздействия и в задачах измерения наблюдаемых свободного объекта могут отличаться; 2) скорость, энергия, составляющие комплексной амплитуды не могут иметь определенных значений во время измерения.

Теория невозмущающих квантовых измерений развивалась применительно к проблеме обнаружения внешнего воздействия на пробную систему (обзор работ дан в [1, 2]). Пробная система и первое звено прибора (квантовая считывающая система, датчик) фактически рассматривались как единая квантовая система. Внешнее воздействие обнаруживается через измерение одной из наблюдаемых полной системы. Эта наблюдаемая может не совпадать ни с одной из наблюдаемых пробной системы, но в задачах обнаружения это роли не играет. Если же ставится задача измерения наблюдаемых свободного объекта, то такое различие наблюдаемых свободного объекта и системы объект — датчик может быть принципиальным. Невозмущающие измерения как измерения наблюдаемых объекта частично обсуждались в [3, 4]. В данной работе последовательно обсуждаются содержание понятия «невозмущающие измерения» и условия невозмущающего измерения с точки зрения измерения наблюдаемых объекта.

1. **Невозмущаемые наблюдаемые.** Любое взаимодействие объекта с прибором сопровождается случайным возмущением некоторых наблюдаемых. Но прибор не возмущает непосредственно ту наблюдаемую, которую он измеряет. Непосредственно возмущаются наблюдаемые, не коммутирующие с измеряемой. В тех случаях, когда возмущение влияет на результат измерения, возмущение передается в измеряемую величину косвенно. Например, прибор, измеряющий координату, возмущает импульс объекта. Лишь с течением времени возмущение импульса переходит в возмущение координаты.

У каждого объекта есть такие наблюдаемые, эволюция которых не зависит от некоммутирующих с ними наблюдаемых. Например, импульс свободной частицы не зависит от координаты. Число квантов энергии гармонического осциллятора не зависит от фазы. Не зависят друг от друга составляющие комплексной амплитуды (амплитуды квадратурных фаз) осциллятора. Измерение этих наблюдаемых не приводит к их случайному возмущению. Обладающие таким свойством наблюдаемые называют невозмущаемыми (или потенциально невозмущаемыми).

К невозмущаемым относятся все наблюдаемые, гейзенберговские операторы которых, взятые в разные моменты времени, взаимно коммутируют:

$$[\hat{N}^0(t), \hat{N}^0(t')] = 0 \quad (1)$$

($\hat{N}^0(t)$ — гейзенберговский оператор изолированного от прибора объекта). Невозмущаемыми являются все интегралы движения. Но не только интегралы движения удовлетворяют условию (1). Невозмущаемыми могут быть также наблюдаемые, зависящие от времени, если $d\hat{N}^0/dt$ не

зависит от некоммутирующих с $\hat{N}^0$ операторов. Невозмущаемая наблюдаемая в общем случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\hat{N}^0}{dt} = \Phi(\hat{N}_j^0, \hat{N}^0), \quad (2)$$

где $\Phi(\hat{N}_j^0, \hat{N}^0)$ — произвольная операторная функция всех коммутирующих с $\hat{N}^0$ операторов. В частности, она может зависеть только от $\hat{N}^0$, может быть равна нулевому оператору или числу. Пример: масса на отрицательной жесткости (тело, скатывающееся с горы). Соответствующий гамильтониан равен

$$\hat{H} = p^2/2m - k\hat{x}^2/2. \quad (3)$$

Наблюдаемые $\hat{z}_{1,2} = \hat{x} \pm \hat{p}/\sqrt{km}$ являются невозмущаемыми, но при этом они не интегралы движения.

2. Содержание понятия «невозмущающее измерение». Целью измерения может быть значение наблюдаемой до включения прибора, ее значение во время взаимодействия с прибором или после его выключения. Соотношения (1), (2) относятся к свободному объекту. Выполнение их гарантирует, что измерение наблюдаемой $\hat{N}^0$ в момент t не возмутит ее значение в момент $t' > t$. Но эти соотношения не гарантируют, что не будет возмущения наблюдаемой во время взаимодействия с прибором. Однако взаимодействие с прибором может иметь такой характер, что в момент его выключения возмущение наблюдаемой исчезает. Во время взаимодействия не будет возмущаться некоторая наблюдаемая $\hat{N}$ системы объект — датчик, значение которой равно значению наблюдаемой $\hat{N}^0$ свободного объекта. Невозмущающими называют не только такие измерения, при которых наблюдаемая $\hat{N}^0$ не изменяется во время взаимодействия с прибором, но и измерения, при которых возмущение есть, но оно исчезает в момент выключения связи с прибором. Если наблюдаемая $\hat{N}^0$ не возмущается во время измерения, то имеется возможность ее контролировать, т. е. непрерывно регистрировать с любой точностью.

Различие в подходах к невозмущающим измерениям в задачах измерения наблюдаемых и в задачах обнаружения воздействия связано с тем, что в последнем случае нет необходимости в разрыве связи датчика с пробным телом. При обнаружении достаточно, чтобы некоторая наблюдаемая системы тело — датчик не возмущалась во время измерения, но не требуется, чтобы ее значение совпадало со значением наблюдаемой свободного тела. Рассмотрим это различие в подходах на примере схемы с датчиком скорости на основе явления электромагнитной индукции.

Лагранжиан тела m , на которое действует сила $F(t)$, и связанного с ним электромагнитного датчика скорости равен

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \alpha x \dot{q} + \mathcal{L}_d(q, \dot{q}) + F(t) \cdot x. \quad (4)$$

Здесь x — координата тела, $\dot{q}$ — ток в датчике, $\mathcal{L}_d(q, \dot{q})$ — лагранжиан датчика, $\alpha \equiv \partial\Phi/\partial x$ — коэффициент связи, Φ — магнитный поток через контур датчика.

Индуктируемая в датчике э. д. с. равна $\mathcal{E} = d(\alpha x)/dt$. Чтобы величина $\mathcal{E}$ была бы функцией только скорости $\dot{x}$, должно быть $\alpha = 0$. Это возможно лишь между моментами включения и выключения связи. Из (4) получим

$$\frac{dp_1}{dt} = -q\alpha + F(t), \quad (5)$$

где

$$p_1 = m\dot{x} - \alpha q. \quad (6)$$

Когда $\dot{a} = 0$, величина p_1 будет интегралом движения системы тело — датчик при $F(t) \equiv 0$.

Учтя (6), э. д. с. $\mathcal{E}$ представим в следующем виде:

$$\mathcal{E} = -\frac{\alpha}{m} p_1 - \frac{\alpha^2}{m} q. \quad (7)$$

Действие такой э. д. с. на датчик подобно действию э. д. с. $-\alpha p_1/m$ и последовательно включенной в цепь датчика емкости m/α^2 . Измеряя постоянную составляющую заряда, можно оценить величину p_1 . Измерение заряда сопровождается возмущением тока, но величина p_1 при $\alpha = 0$ не будет зависеть от флуктуаций тока, т. е. измерение p_1 будет невозможным. Наблюдаемая p_1 в данном случае является интегралом движения и невозмущаемой наблюдаемой в системе тело — датчик. Для обнаружения действия силы $F(t)$ достаточно заметить изменение величины p_1 и нет необходимости в измерении скорости тела. Неопределенность величины $m\dot{x}$ при заданном значении p_1 обусловлена неопределенностью величины αq .

Измерив значение p_1 , можно оценить величину $m\dot{x}$ до и после взаимодействия с датчиком, но оценка будет с погрешностью даже при точно измеренном p_1 . Значение p_1 отличается от значения $m\dot{x}$ до включения связи на случайную величину $-\int q(t)\alpha(t)dt$ (интеграл за время включения) и от значения $m\dot{x}$ после выключения связи на аналогичный интеграл за время выключения. Значение $m\dot{x}$ после измерения может отличаться на случайную величину от начального значения $m\dot{x}$. Такое измерение не будет невозмущающим измерением скорости тела.

Для невозмущающего измерения скорости необходимо, чтобы перекрестный член в лагранжиане (4) был бы равен $\alpha\dot{x}q$ (или $-d(\alpha q)/dt$). В этом случае величина $p_x = m\dot{x} + d(\alpha q)/dt$ была бы интегралом движения системы тело — датчик даже при $\alpha \neq 0$. Значение p_x не будет отличаться от значения величины $m\dot{x}$, которое она имеет до включения и после выключения связи. Погрешность измерения p_x будет равна погрешности измерения величины $m\dot{x}$, относящейся к моментам до и после измерения. Во время измерения скорость опять же будет иметь случайное значение даже при точно определенном значении p_x .

Из рассмотренного примера следует, что условия невозмущающего измерения в задаче обнаружения воздействия могут не соответствовать условиям невозмущающего измерения наблюдаемой свободного тела. Электромагнитный датчик скорости позволяет реализовать схему невозмущающего измерения наблюдаемой p_1 системы тело — датчик, но не может быть невозмущающим датчиком скорости свободного тела.

Величину p_x можно контролировать, т. е. регистрировать непрерывно с любой точностью. Скорость тела контролировать нельзя. Невозможность контроля скорости отражена в постулатах квантовой механики. При измерении импульса должно происходить увеличение неопределенности координаты. Случайное изменение координаты может быть следствием движения с неопределенной скоростью в течение известного времени или движения с определенной скоростью, но неопределенное время. Но если бы скорость контролировалась, то ее неопределенность в любой момент времени была бы равна нулю.

Невозможно контролировать энергию. Условием невозможности измерения энергии является такое взаимодействие объекта с датчиком, при котором их общий гамильтониан может быть представлен в виде [1, 3]

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \alpha \hat{H}_0 \hat{A} + \hat{H}_a, \quad (8)$$

где $\hat{H}_0$, $\hat{H}_a$ — гамильтонианы объекта и датчика соответственно, $\alpha \hat{H}_0 \hat{A}$ — гамильтониан взаимодействия, $\hat{A}$ — некоторая наблюдаемая датчика, α — коэффициент связи. При таком взаимодействии наблюдаемая $\hat{H}_0$ не возмущается в процессе измерения, но энергия объекта в это время равна $\hat{H}_0(1 + \alpha \hat{A})$, причем $\hat{A}$ — случайная величина. В случае измерения энергии осциллятора $\hat{H}_0(1 + \alpha \hat{A}) = (\hat{n} + 1/2) \hbar \omega_0(1 + \alpha \hat{A})$ соответствует осциллятору со случайной частотой $\hat{\omega} = \omega_0(1 + \alpha \hat{A})$ (ω_0 — частота свободного осциллятора) [3]. Неопределенность частоты обуславливает неопределенность возмущения фазы в процессе измерения энергии. Число квантов энергии не изменяется, т. е. его можно контролировать.

Аналогично можно показать, что не поддаются контролю действительная и мнимая части комплексной амплитуды, поскольку они являются функциями скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Braginsky V. B., Vorontsov Y. I., Thorne K. S. // Science. 1980. 20. P. 547. [2] Caves C. M., Thorne K. S., Drever R. W. et al. // Rev. Mod. Phys. 1980. 52. P. 341. [3] Воронцов Ю. И. // УФН. 1981. 133, № 2. С. 315. [4] Афанасьев Ю., Safko J. L. // Ann. of Phys. (N. Y.). 1975. 91, N 2. P. 279.

Поступила в редакцию
16.01.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 2

УДК 530.145:530.12; 537.8:530.145

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ПЕРЕСТРОЙКА ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННОГО ВАКУУМА В КУЛОНОВСКОМ И СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

В. Р. Халилов

(кафедра теоретической физики)

Вычислена вероятность рождения электронно-позитронной пары полем кулоновского центра в сверхсильном магнитном поле. Получено уравнение, неявно определяющее критический заряд тяжелого ядра. Построена функция, характеризующая пространственное распределение заряда электрона в новом (заряженном) вакууме.

Как известно [1, 2], энергия электрона в основном состоянии E_0 в кулоновском поле $A_\mu(x) = (Ze/r, 0, 0, 0)$,

$$E_0 = \sqrt{1 - (Z\alpha)^2} \cdot mc^2, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c},$$

при $Z = \alpha^{-1}$ обращается в ноль, а при $Z > \alpha^{-1}$ становится чисто мнимой; Z — заряд ядра. Однако если поставить граничное условие в точке $r = 0$, что означает обрезание кулоновского потенциала на малых расстояниях, т. е. учет размеров ядра, то оказывается [1, 2], что с ростом Z уровни энергии, становясь отрицательными, опускаются и могут пересечь границу нижнего континуума $-mc^2$. Значение Z_c , при котором E_0 точно