Невозможно контролировать энергию. Условием невозмущающего измерения энергии является такое взаимодействие объекта с датчиком, при котором их общий гамильтониан может быть представлен в виде [1, 3]

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\alpha\hat{H}_0\hat{A}+\hat{H}_a, \qquad (8)$$

где $\hat{H}_0$, $\hat{H}_a$ — гамильтонианы объекта и датчика соответственно, $\alpha\hat{H}_0\hat{A}$ — гамильтониан взаимодействия, $\hat{A}$ — некоторая наблюдаемая датчика, α — коэффициент связи. При таком взаимодействии наблюдаемая $\hat{H}_0$ не возмущается в процессе измерения, но энергия объекта в это время равна $H_0(1+\alpha A)$, причем A — случайная величина. В случае измерения энергии осциллятора $\hat{H}_0(1+\alpha\hat{A})=(\hat{n}+1/2)\hbar\omega_0(1+\alpha\hat{A})$ соответствует осциллятору со случайной частотой $\widehat{\omega}=\omega_0(1+\alpha\hat{A})$ (ω_0 — частота свободного осциллятора) [3]. Неопределенность частоты обусловливает неопределенность возмущения фазы в процессе измерения энергии. Число квантов энергии не изменяется, т. е. его можно контролировать.

Аналогично можно показать, что не поддаются контролю действительная и мнимая части комплексной амплитуды, поскольку они являются функциями скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Braginsky V. B., Vorontsov Y. I., Thorne K. S.//Science. 1980. **20**. P. 547. [2] Caves C. M., Thorne K. S., Drever R. W. et al.//Rev. Mod. Phys. 1980. 52. P. 341. [3] Воронцов Ю. И.//УФН. 1981. **133**, № 2. С. 315. [4] Aharonov Y., Safko J. L.//Ann. of Phys. (N. Y.). 1975. **91**, N 2. P. 279.

Поступила в редакцию
16.01.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 2

УДК 530.145:530.12; 537.8:530.145

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ПЕРЕСТРОЙКА ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННОГО ВАКУУМА В КУЛОНОВСКОМ И СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

В. Р. Халилов

(кафедра теоретической физики)

Вычислена вероятность рождения электронно-позитронной пары полем кулоновского центра в сверхсильном магнитном поле. Получено уравнение, неявно определяющее критический заряд тяжелого ядра. Построена функция, характеризующая пространственное распределение заряда электрона в новом (заряженном) вакууме.

Как известно [1, 2], энергия электрона в основном состоянии E_0 в кулоновском поле $A_\mu(x)=(Ze/r,\ 0,\ 0,\ 0)$,

$$E_0=\sqrt{1-(Z\alpha)^2}\cdot mc^2, \quad \alpha=\frac{e^2}{c\hbar},$$

при $Z=\alpha^{-1}$ обращается в ноль, а при $Z>\alpha^{-1}$ становится чисто мнимой; Z — заряд ядра. Однако если поставить граничное условие в точке $r=0$, что означает обрезание кулоновского потенциала на малых расстояниях, т. е. учет размеров ядра, то оказывается [1, 2], что с ростом Z уровни энергии, становясь отрицательными, опускаются и могут пересечь границу нижнего континуума $-mc^2$. Значение Z_c, при котором E_0 точно равна $-mc^2$, называется критическим. Если Z продолжает расти и заходит в закритическую область ($Z>Z_c$), то низший электронный уровень погружается в нижний континуум, что влечет за собой перестройку вакуума, причем эту перестройку лимитирует принцип Паули. Так, если низшее электронное состояние при $Z<Z_c$ было не заполнено, то рождаются две пары, если заполнено наполовину — одна пара, если заполнено полностью, то пары не рождаются, по крайней мере при $Z=Z_c+\Delta Z$, $0<\Delta Z\ll Z_c$ [1].

В сверхсильном магнитном поле при условии

$$a\gg a_H, \tag{1}$$

где a — радиус первой боровской орбиты водородоподобного атома ($a=\hbar^2/(me^2Z)$), a_H — циклотронный радиус: $a_H=(c\hbar/(eH))^{1/2}$, процесс спонтанного образования пар приобретает ряд интересных особенностей [3, 4]. В частности, если (1) выполнено, то электрон (в перпендикулярной к вектору **H** плоскости) находится ближе к центру, т. е. его потенциальная энергия уменьшается и, следовательно, уменьшается критический заряд по сравнению со случаем $\mathbf{H}=0$. Кроме того, в низшем состоянии в магнитном поле электрон полностью поляризован (спин направлен противоположно вектору **H**), поэтому при $Z>Z_c(H)$ либо может родиться одна пара, если основное состояние не было занято при $Z<Z_c(H)$, либо вообще пары не рождаются, если низшее состояние было занятым [3, 4]. Заметим, что рождающиеся в таком процессе в присутствии магнитного поля позитроны также должны быть полностью поляризованными.

Ниже дается решение задачи о спонтанном рождении позитронов в сверхсильном магнитном поле квазиклассическим методом.

Этот метод, помимо того что обладает большой наглядностью, позволяет сравнительно просто найти спектр импульсов рождающихся позитронов и, таким образом, дать конкретные рекомендации по условиям наблюдения процесса.

При выполнении условия (1) движение электрона одномеризуется, а эффективный потенциал поля, в котором происходит движение, можно получить, усредняя кулоновский потенциал Ze/r в перпендикулярной **H** плоскости по волновым функциям электрона в магнитном поле в состоянии $n=0$ (n — номер уровня Ландау). Замечательно, что такой усредненный потенциал оказывается конечным во всех точках, включая точку $r=0$, т. е. сильное магнитное поле «обрезает» потенциал ядра на малых расстояниях и тем самым известной проблемы корректного построения решения в окрестности точки $r=0$, возникающей в чисто кулоновском поле, здесь нет. В [5] было показано, что эффективный потенциал, хорошо моделирующий усредненный, в области $a_H>R$ удобно взять в виде

$$\widetilde{V}=\frac{Ze}{|z|+a_H}, \tag{2}$$

где R — радиус ядра, создающего кулоновское поле.

Волновую функцию электрона в низшем состоянии, как показано в [3, 4], следует искать в виде

$$\Psi(t,\ z)=Be^{-\frac{iEt}{\hbar}}\begin{pmatrix}0\\ -ig(z)\\ 0\\ f(z)\end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение Дирака для низшего спиново-поляризованного состояния электрона в магнитном поле и поле (2) имеет вид

$$\frac{dg}{dz}-(K+k_0-V)f=0,$$

$$\frac{df}{dz}+(K-k_0-V)g=0, \tag{3}$$

где $K=E/(c\hbar)$, $V=e\tilde{V}/(c\hbar)$, E — энергия, $m=\hbar k_0/c$ — масса электрона. Эта система уравнений при замене $f\leftrightarrow g$ описывает позитрон с энергией $-E$ в поле $-\tilde{V}$. Удобно исключить f из системы (2) и далее с помощью подстановки

$$g(z)=(K+k_0-V)^{1/2}F(z) \tag{4}$$

получить для F уравнение вида уравнения Шрёдингера:

$$\frac{d^2F}{dz^2}+k^2(z)F=0, \tag{5}$$

где

$$k^2(z)=2(\varepsilon-U),\ \varepsilon=(K^2-k^2{}_0)/2, \tag{6}$$

$$U=kV-\frac{V^2}{2}+\frac{1}{4}\left[\frac{d^2V}{dz^2}(K+k_0-V)^{-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}\left(\frac{dV}{dz}\right)^2(K+k_0-V)^{-2}\right].$$

В уравнении (4) вид потенциальной энергии $V(z)$ еще не конкретизирован. Функция $U(z)$ играет роль эффективной потенциальной энергии электрона.

Рассмотрим низший уровень энергии частицы, предполагая, что $K\rightarrow -k_0$, т. е. вблизи границы нижнего континуума. Так как U при K порядка $-k_0$ зависит слабо от K, то в U можно положить $K=-k_0$. В этом случае

$$U=k_0^2\left\{\frac{\xi}{|z|+\delta}-\frac{\xi^2+1/4}{2(|z|+\delta)^2}\right\},\quad \xi\equiv Z\alpha, \tag{7}$$

где z — безразмерная величина, $z\equiv z/k_0$, $\delta=a_H/k_0=(H/H_c)^{1/2}$, $H_c=m^2c^3/(|e|\hbar)$, и в уравнении (4) потенциал уже не зависит от энергии.

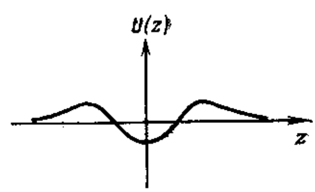
Чтобы рассмотреть на основе системы (2) позитрон с энергией $E>0$, нужно исключить из (2) g и подстановкой

$$f=(k_0-K+V)^{1/2}G \tag{8}$$

привести (2) к уравнению

$$d^2G/dz^2+\tilde{k}^2(z)G=0, \tag{9}$$

где $\tilde{k}^2(z)$ совпадает с $k^2(z)$ после замены $K\rightarrow -K$, $V\rightarrow -V$, а эффективный потенциал (7) совпадает с эффективным потенциалом уравнения (9) при $K=k_0$. Таким образом, уравнение (9) с эффективным потенциалом (7) описывает позитрон с энергией $E\cong mc^2$. Качественно вид потенциала (7) показан на рисунке.



Потенциал симметричен относительно точки $z=0$, имеет две точки поворота в области $z>0$:

$$t_{1,2}=e\pm\sqrt{e^2-d^2},$$
$$e=\frac{\xi\widetilde{K}}{\widetilde{K}^2-1},\quad d^2=\frac{\xi^2+1/4}{\widetilde{K}^2-1},\quad \widetilde{K}=\frac{K}{k_0}. \tag{10}$$

Максимальное значение потенциала положительно: $U_{\max}>0$. Видно, что все состояния с «энергией частицы» $\varepsilon=(K^2-k_0^2)/2$ (т. е. с энергией позитрона $E>mc^2$) квазистационарны. Если барьер достаточно широк, то ширину квазистационарного уровня можно оценить как обратное время жизни позитрона в области $-t_2<z<t_2$. Для этого нужно оценить «коэффициент проницаемости барьера»:

$$D=\exp(-2J/\hbar), \tag{11}$$

где

$$J=\hbar\int_{t_2}^{t_1}|\widetilde{k}(z)|dz=\sqrt{\widetilde{K}^2-1}\int_{t_2}^{t_1}\frac{\sqrt{-d^2+2et-t^2}}{t^2}\,dt. \tag{12}$$

Вычисляя интеграл (12), получим $J=\pi(e-d)$ и

$$D=\exp\left\{-2\pi\left[\frac{\xi\widetilde{K}}{(\widetilde{K}^2-1)^{1/2}}-\left(\xi^2+\frac{1}{4}\right)^{1/2}\right]\right\}\cong\gamma\equiv\frac{1}{\tau}, \tag{13}$$

где γ — ширина квазистационарного уровня, равная обратному времени жизни позитрона в области $-t_2<z<t_2$. Формула (13) очень похожа на результат, полученный в [1] для случая чисто кулоновского поля. Однако по существу результаты различны. Так, в чисто кулоновском поле $\widetilde{K}^2=1+p^2$, где $p\equiv p/(mc)$ — полный импульс позитрона, в то время как в (13) $\widetilde{K}^2=1+p_z^2$, где $p_z\equiv p_z/mc$ — проекция импульса позитрона на направление поля (ось Oz). Таким образом, функция распределения рожденных кулоновским полем позитронов по импульсам в сильном магнитном поле анизотропна (в чисто кулоновском поле распределение изотропно). Второе отличие касается величины γ, в значительной степени зависящей от значения ξ. Напомним, что формула (13) хорошо работает, когда показатель экспоненты не мал. Однако в сверхсильных магнитных полях ξ_c и ξ в формуле (13) меньше единицы. В чисто кулоновском поле всегда $\xi>1$, поэтому численные значения показателей экспонент в этих двух случаях могут значительно отличаться друг от друга, причем так, что $\gamma(H\neq0)>\gamma(H=0)$.

При $\xi>\xi_c$ низший электронный уровень «погружается» в нижний континуум. Для ответа на вопрос о пространственной локализации электрона в основном состоянии рассмотрим решение уравнения Дирака, когда значение K точно равно $-k_0$. В этом случае уравнение (5) решается точно, а функции g и f найдем из соотношений

$$g=(-V)^{-1/2}F\sim\mathcal{K}_{i\nu}(y),$$
$$f=-V^{-1}\frac{dg}{dz}=\frac{z+\delta}{\xi_c}\,\frac{d\mathcal{K}_{i\nu}(y)}{dy}, \tag{14}$$
$$\nu=2\left(\xi_c^2+\frac{1}{4}\right)^{1/2},\quad y=\sqrt{8\xi_c(z+\delta)},\quad z>0,$$

где $\mathcal{K}_{i\nu}(y)$ — функция Макдональда. Отсюда видно, что электрон на границе нижнего континуума остается локализованным в направлении вектора **H** (и вообще в пространстве, так как в плоскости, перпендикулярной к вектору **H**, он локализован в круге площади порядка πa_H^2). При $Z>Z_c$ система (3) имеет только формальное решение с $K=K_0-i\gamma$, где $K_0=k_0(1+b(\xi-\xi_c))$, $b\sim 1$, т. е. связанное электронное состояние исчезает и, как мы видели, появляется квазистационарный уровень [1].

Волновые функции, описывающие движение частицы в поле (2), разбиваются на два класса: 1) четная g и нечетная f и 2) четная f и нечетная g. Низшее (основное) состояние принадлежит классу с четной g, поэтому должно выполняться условие

$$f(0)=\left.\frac{d\mathscr{K}_{i\nu}(y)}{dy}\right|_{z=0}=0.$$

Из этого уравнения неявно определяется критический заряд.

Нетрудно показать, что формальное решение системы (3) для электрона при $Z>Z_c$ можно представить в виде (см., напр., [1, 6]):

$$\Psi_K^-=B'\frac{\gamma^{1/2}}{K-K_0-i\gamma}\,e^{i\varphi}\begin{pmatrix}0\\-ig(z)\\0\\f(z)\end{pmatrix},$$

где B' — нормировочный коэффициент, φ — фаза волновой функции. А так как при $Z<Z_c$ квазистационарное состояние отсутствует, то, если все вакуумные состояния заполнены, дополнительную плотность заряда вакуума при $Z=Z_c+\Delta Z$, как показано, например, в [1], можно найти из формулы

$$\rho(z)=-e\int\limits_{K_0-0}^{K_0+0}|\Psi_K^-|^2_{Z=Z_c+\Delta Z}\,dK=-eB'^2\,(g^2(z)+f^2(z)).$$

Следовательно, новый вакуум, который соответствует заполнению всех состояний с $K<-k_0$, имеет полный заряд $-e$ и обладает также вектором магнитного момента (вследствие поляризации электрона в основном состоянии). Следует подчеркнуть, что в терминах нового вакуума величины $\rho(z)$ и вектор магнитного момента являются классическими (т. е. не квантовыми) величинами. Так, $\rho(z)$ является функцией, характеризующей пространственное распределение полного заряда $-e$ в новом (заряженном) вакууме, в то время как в терминах старого (не заряженного) вакуума величину $\rho(z)$ следовало бы трактовать как вероятность нахождения электрона (с зарядом $-e$) в заданной точке пространства. Аналогично изменяется трактовка и других физических величин, которыми определяются физические свойства нового вакуума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мигдал А. Б. Фермионы и бозоны в сильном поле. М., 1978. [2] Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. М., 1980. [3] Ораевский В. Н., Рез А. И., Семикоз В. Б.//ЖЭТФ. 1977. 72. С. 820. [4] Тернов И. М., Халилов В. Р.//ЖЭТФ. 1981. 81. С. 1953. [5] Крайнов В. П.//ЖЭТФ. 1973. 64. С. 800. [6] Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., 1966.

Поступила в редакцию
03.12.87