УДК 530.145:524.882

О КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ В ОКРЕСТНОСТИ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

А. Б. Гаина, И. М. Тернов

(кафедра теоретической физики)

Рассматриваются вопросы построения квантовой механики в поле черной дыры Керра—Ньюмена.

Гравитационное и электромагнитное поля Эйнштейна—Максвелла представляют собою самосогласованное решение системы уравнений Эйнштейна—Максвелла:

$$R_{\mu\nu}-(1/2)\,g_{\mu\nu}R=8\pi\,(T_{\mu\nu}+T^{(em)}_{\mu\nu}), \tag{1}$$

где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса (ТЭИ) вещества неэлектромагнитной природы, $T^{(em)}_{\mu\nu}$ — ТЭИ электромагнитного поля, имеющий вид

$$T^{(em)}_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(-F_{\mu\rho}F^{\rho}_{\nu}+\frac{1}{4}\,g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right). \tag{2}$$

Компоненты электромагнитного поля удовлетворяют общековариантным уравнениям Максвелла

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu}=-4\pi F j^{\mu}, \tag{3}$$

«;» — обозначает ковариантное дифференцирование по повторяющемуся индексу, в то время как «,» — обычную частную производную. С целью сокращения записи формул здесь и далее применяется система единиц, в которой $c=\hbar=G=1$.

Примером такого решения является геометрия Керра—Ньюмена [1, 2] и соответствующее ей электромагнитное поле, описывающее состояние стационарной, вращающейся и заряженной черной дыры (ЧД). В координатах Бойера—Линдквиста (t, r, θ, φ), обобщающих обычные сферические координаты, метрика Керра—Ньюмена имеет вид

$$ds^2=\frac{\Delta}{\Sigma}\,[dt-a\sin^2\theta d\varphi]^2-\frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\,[(r^2+a^2)\,d\varphi-adt]-\frac{\Sigma}{\Delta}\,dr^2-\Sigma d\theta^2, \tag{4}$$

где

$$\Delta=r^2-2Mr+a^2+Q^2,\ \ \Sigma=r^2+a^2\cos^2\theta, \tag{5}$$

M, Q — масса и заряд ЧД, параметр a связан с угловым моментом ЧД: $a=J/M$. Электромагнитное поле удобно описывать с помощью векторного потенциала:

$$A_{\mu}=(-Qr/\Sigma,\ 0,\ 0,\ Qra\sin^2\theta/\Sigma). \tag{6}$$

Геометрия Керра—Ньюмена является асимптотически-плоской, обладает аксиальной симметрией и несингулярным горизонтом событий при $r_+=M+\sqrt{M^2-a^2-Q^2}$, когда $g_{rr}=\infty$. Отметим также, что всюду вне источника скаляр кривизны R равен нулю, так как в правой части

уравнений Эйнштейна (1) имеется лишь бесследовый ТЭИ электромагнитного поля:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T^{(em)}_{\mu\nu}. \tag{7}$$

Рассмотрим далее массивное, заряженное скалярное поле, взаимодействующее с внешними гравитационным и электромагнитным полями Эйнштейна — Максвелла, удовлетворяющими системе уравнений (1)—(3). Будем рассматривать теорию с конформно-инвариантным лагранжианом [3]:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[(\mathscr{D}_\mu\Phi)^*(\mathscr{D}^\mu\Phi) - \left(\mu^2 + \frac{1}{6}R\right)\Phi^*\Phi\right], \tag{8}$$

$$\mathscr{D}_\mu = \nabla_\mu + ieA_\mu, \tag{9}$$

где ∇_μ — оператор ковариантного дифференцирования, μ, e — масса и заряд частицы, A_μ — векторный потенциал электромагнитного поля, удовлетворяющий условию калибровки:

$$A^\mu{}_{;\mu} = 0. \tag{10}$$

Принцип наименьшего действия позволяет получить обобщенные уравнения Клейна — Гордона — Фока (КГФ) для компонент скалярного поля:

$$2\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\Phi^*} = \left[\mathscr{D}_\mu\mathscr{D}^\mu + \mu^2 + \frac{1}{6}R\right]\Phi = 0. \tag{11}$$

Выражение в квадратных скобках будем называть в дальнейшем оператором КГФ. Очевидно, что аналогичное уравнение получается для комплексно сопряженной компоненты поля Φ^*. Так как лагранжиан (8) не меняется при фазовых преобразованиях $\Phi \to \Phi e^{-i\beta}$ и, соответственно, $\Phi^* \to \Phi^* e^{i\beta}$, то, применяя теорему Нетер, несложно получить ковариантно сохраняющиеся четырехвекторные плотности электрического тока и тока вероятности:

$$J^\mu = \frac{1}{2}ie\{\Phi^*(\mathscr{D}^\mu\Phi) - \Phi(\mathscr{D}^\mu\Phi)^*\} = ej^\mu. \tag{12}$$

Из уравнения непрерывности

$$J^\mu{}_{;\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\,J^\mu)_{,\mu}, \tag{13}$$

применяя теорему Гаусса, получаем интегральный закон сохранения электрического заряда (см., напр., [4]):

$$\int\limits_{x^0=\mathrm{const}} J^0\sqrt{-g}\,d^3x = e. \tag{14}$$

Аналогичные соотношения имеют место и для вектора j^μ.

Симметричный ТЭИ скалярного поля получается вариацией действия по метрическому тензору:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}(\sqrt{-g}\,\mathscr{L}) =$$

$$= (\mathscr{D}_{(\mu}\Phi)^*(\mathscr{D}_{\nu)}\Phi) - g_{\mu\nu}\mathscr{L} - \frac{1}{6}[R_{\mu\nu} + \nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)} - g_{\mu\nu}\Box]\Phi^*\Phi. \tag{15}$$

Он связан с каноническим ТЭИ соотношением

$$T_{\mu\nu}=T^{(\mathrm{can})}_{\mu\nu}-A_\mu J_\nu-(1/6)\left[R_{\mu\nu}+\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}-g_{\mu\nu}\Box\right]\Phi^*\Phi. \tag{16}$$

Кроме явной симметрии он обладает еще следующими двумя важными свойствами:

$$T^{\mu}{}_{;\mu}=\mu^2\Phi^*\Phi, \tag{17}$$

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu}=F_{\mu\nu}J^\nu. \tag{18}$$

При отсутствии электромагнитного взаимодействия правая часть (18) обращается в ноль. Однако даже в этом случае обращение в ноль ковариантной производной ТЭИ второго ранга еще не означает сохранения во времени каких-либо интегральных физических величин. Для этого необходимо выполнение уравнения непрерывности типа (13) для определенных векторных плотностей.

Из ТЭИ, определенного соотношением (15), можно сконструировать ковариантно сохраняющуюся векторную плотность (и, соответственно, интегрально сохраняющуюся физическую величину) лишь при наличии определенных симметрий пространства-времени и электромагнитного поля. Пусть, к примеру, метрика и электромагнитное поле обладают вектором Киллинга k^μ, так что выполняются соотношения

$$\mathcal{L}_k g_{\mu\nu}=2k_{(\mu;\nu)}\equiv k_{\mu;\nu}+k_{\nu;\mu}=0. \tag{19}$$

$$\mathcal{L}_k A_\mu\equiv A_\nu k^\nu{}_{;\mu}+A_{\mu;\nu}k^\nu=0, \tag{20}$$

$\mathcal{L}_k$ обозначает производную Ли вдоль векторного поля k^μ, а круглые (квадратные) скобки — симметризацию (антисимметризацию). Рассмотрим далее векторную плотность:

$$\mathcal{T}^\mu=k^\nu\left(T^\mu{}_\nu+A_\nu J^\mu\right). \tag{21}$$

Тогда, используя соотношения (18)—(20), несложно показать, что имеет место ковариантное сохранение:

$$\mathcal{T}^\mu{}_{;\mu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\,\mathcal{P}^\mu\right)_{,\mu}=0, \tag{22}$$

т. е. по аналогии с электрическим зарядом (14) можно построить интегрально сохраняющуюся величину.

При наличии вектора Киллинга, отражающего трансляционную симметрию пространства-времени и электромагнитного поля, сохраняющиеся величины могут быть установлены непосредственно из теоремы Нетер. Действительно, так как лагранжиан, описывающий частицу, инвариантен относительно преобразований координат:

$$x^\mu\to x'^\mu=x^\mu+\varepsilon k^\mu,\ \text{где}\ |\varepsilon|\ll 1, \tag{23}$$

то величина

$$\mathcal{P}^\mu=\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_{,\mu}}(\mathcal{L}_k\Phi)^*+(\mathcal{L}_k\Phi)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^*_{,\mu}}-k^\mu\mathcal{L} \tag{24}$$

также удовлетворяет уравнению непрерывности [5]. В рассматриваемом случае массивного скалярного поля с лагранжианом (8) нетрудно получить

$$\mathcal{P}^\mu=(1/2)\,k^\nu\left[\Phi_{,\nu}(\mathcal{D}^\mu\Phi)^*+\Phi^*_{,\nu}(\mathcal{D}^\mu\Phi)\right]-(1/2)\,k^\mu\mathcal{L}. \tag{25}$$

Можно показать, однако, что векторные плотности (21) и (25) отличаются друг от друга на величину дивергенции от антисимметричного тензора второго ранга:

$$\mathcal{P}^{\mu}-\mathcal{T}^{\mu}=(1/6)(k^{[\mu}\Phi^{*}\Phi)^{;\nu]}{}_{;\nu}. \tag{26}$$

Дивергенция этой разности оказывается равной нулю, поэтому векторные плотности $\mathcal{P}^{\mu}$ и $\mathcal{T}^{\mu}$ соответствуют одной и той же физической сохраняющейся величине. Заметим, что соотношение (26) получено без каких-либо ограничений на тензор Риччи $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ и тензор электромагнитного поля. Для доказательства этого соотношения, устанавливающего физическую эквивалентность величин $\mathcal{P}^{\mu}$ и $\mathcal{T}^{\mu}$, необходимо воспользоваться уравнением

$$k_{\mu;\nu;\rho}=k_{\tau}R^{\tau}_{\rho\nu\mu}, \tag{27}$$

которое следует из определения (19).

Для формулировки квантовой механики скалярных частиц необходимо соответствующим образом ввести скалярное произведение и операторы физических величин, удовлетворяющие условию эрмитовости. Введем билинейную форму:

$$g^{\mu}(\Phi_1,\ \Phi_2)=(i/2)\{\Phi_1^{*}(\mathcal{D}^{\mu}\Phi_2)-\Phi_2(\mathcal{D}^{\mu}\Phi_1)^{*}\}, \tag{28}$$

обладающую свойствами

$$g^{\mu}(\Phi_1,\ \Phi_2)=[g^{\mu}(\Phi_2,\ \Phi_1)]^{*}, \tag{29}$$

$$g^{\mu}(\Phi,\ \Phi)=j^{\mu}. \tag{30}$$

Основное требование к скалярному произведению — независимость от выбора гиперповерхности интегрирования. Введем его для векторов $|\Phi_1>$ и $|\Phi_2>$ согласно формуле

$$\langle\Phi_1|\Phi_2\rangle=\int g^{\mu}(\Phi_1,\ \Phi_2)\sqrt{-g}\,d\Sigma_{\mu}, \tag{31}$$

где $d\Sigma_{\mu}$ — элемент гиперповерхности интегрирования. После перехода к интегрированию по гиперповерхности $x^0=\text{const}$ скалярный квадрат (норма) принимает вид

$$\langle\Phi|\Phi\rangle=\int j^{0}\sqrt{-g}\,d^{3}x, \tag{32}$$

где $d^3x=d\Sigma_0$.

Картер [6] строго показал, что в пространствах Эйнштейна — Максвелла, обладающих симметриями, можно построить физические величины и соответствующие им квантовомеханические операторы, коммутирующие с оператором КГФ (11). Так, при наличии вектора Киллинга k^{μ} оператор

$$\widehat{K}=ik^{\mu}\nabla_{\mu}\equiv ig^{\mu\nu}k_{(\mu}\nabla_{\nu)} \tag{33}$$

эрмитов в смысле определения (31) и коммутирует с оператором КГФ. Оператору (33) можно сопоставить векторную плотность:

$$\mathcal{K}^{\mu}=g^{\mu}(\Phi,\widehat{K}\Phi)=k^{\nu}\{\Phi_{,\nu}(\mathcal{D}^{\mu}\Phi)^{*}-\Phi^{*}(\mathcal{D}^{\mu}\Phi_{,\nu})\}+k^{\mu;\nu}\Phi^{*}\Phi_{,\nu}. \tag{34}$$

Однако нетрудно показать, что между величинами (34), (25) и (21) существует связь. Например:

$$\mathcal{K}^{\mu}-\mathcal{P}^{\mu}=2(\Phi^{*}k^{[\mu}\mathcal{D}^{\nu]}\Phi)_{;\nu}, \tag{35}$$

т. е. эти векторные плотности также отличаются на величину дивергенции от антисимметричного тензора второго ранга. Поэтому величина $\mathcal{K}^{\mu}$ также удовлетворяет уравнению непрерывности и физически эквивалентна величинам $\mathcal{P}^{\mu}$ и $\mathcal{T}^{\mu}$.

Рассмотрим далее более сложный вид симметрии пространства-времени и электромагнитного поля, описываемый так называемым тензором Штеккеля. Это симметричный тензор второго ранга, удовлетворяющий условиям

$$a_{[\mu\nu]}=0;\ a_{(\mu\nu;\rho)}=0;\ a_{\rho}{}^{(\mu}F^{\nu)\rho}=0. \tag{36}$$

Можно показать [6], что если тензор Штеккеля удовлетворяет дополнительному условию:

$$a_{\rho[\mu}R_{\nu]}{}^{\rho}=0, \tag{37}$$

тогда оператор

$$\hat{A}=\hat{\mathcal{D}}_{\mu}a^{\mu\nu}\hat{\mathcal{D}}_{\nu} \tag{38}$$

коммутирует с оператором КГФ и, таким образом, является квантовым интегралом движения. В этом случае тензор (36) называют тензором Штеккеля — Киллинга. Оператору (38) сопоставляется векторная плотность:

$$A^{\mu}=g^{\mu}(\Phi,\ \hat{A}\Phi)=(i/2)\{\Phi^{*}(\mathcal{D}^{\mu}\hat{A}\Phi)-\hat{A}\Phi(\mathcal{D}^{\mu}\Phi)\}. \tag{39}$$

Используем приведенный формализм для построения квантовой механики в поле черной дыры Керра — Ньюмена. Гравитационное и электромагнитное поля Керра — Ньюмена (4)—(6) стационарны и аксиально-симметричны. (Это выражается в независимости метрического тензора и векторного потенциала A_{μ} от координат t и φ.) Следовательно, имеются два независимых векторных поля Киллинга:

$$k_{(t)}{}^{\mu}=\delta_{t}{}^{\mu},\ k_{(\varphi)}{}^{\mu}=\delta_{\varphi}{}^{\mu}. \tag{40}$$

Кроме того, как было показано Уолкером и Пенроузом [7], конфигурация Керра — Ньюмена обладает также и тензором Штеккеля — Киллинга. Таким образом, скалярное уравнение КГФ обладает тремя операторами, коммутирующими с оператором КГФ и между собой. Векторам Киллинга отвечает энергия E и проекция орбитального момента частицы m на ось вращения черной дыры, измеренные удаленным наблюдателем. Тензору Штеккеля — Киллинга сопоставляется квадрат обобщенного орбитального момента частицы λ^2. Волновая функция с разделенными переменными t, r, θ, φ будет соответствовать состоянию частицы с заданными E, m, λ^2:

$$\Phi_{E,\lambda,m}(t,r,\theta,\varphi)=\langle t,r,\theta,\varphi\,|E,\lambda_{l}^{m}(a),m\rangle=e^{-i\omega t}R_{E,\lambda,m}(r)\,Z_{l}^{m}(\theta,\varphi), \tag{41}$$

где $l=0,1,2,\ldots;\ m=0,\mp1,\mp2,\mp l$.

Отметим, что если ЧД не вращается, то $\lambda_{l}^{m}(0)=\sqrt{l(l+1)}$, т. е. константа разделения λ переходит в модуль орбитального момента частицы в центральном поле. При этом сфероидальные гармоники

$Z_l^m(\theta, \varphi)$, входящие в (41), переходят в обычные сферические гармоники.

Рассмотрим вопрос о пределах применимости одночастичной квантовой механики в полях Эйнштейна — Максвелла. Скалярное произведение уравнения КГФ, определенное соотношением (31), не является, вообще говоря, положительно-определенным. Например, в геометрии Керра — Ньюмена и в состоянии, описываемом волновой функцией (41), норма (32) определяется интегралом

$$\langle\Phi|\Phi\rangle = \langle E, l, m|E, l, m\rangle = \int \sqrt{-g}\,\{(E-eA_t)\,g^{tt}-$$

$$-(m+eA_\varphi)\,g^{t\varphi}\}\,\Phi^*\Phi d^3x. \qquad (42)$$

Очевидно, она положительно определена при условии

$$E > eA_t + (m+eA_\varphi)\frac{g^{t\varphi}}{g^{tt}} = eA_t - (m+eA_\varphi)\frac{g_{t\varphi}}{g_{tt}}, \qquad (43)$$

однако может не быть таковой в обратном случае. На бесконечности ($r\to\infty$) выражение из правой части (43) обращается в ноль, а на поверхности горизонта событий принимает значение

$$E_0 = m\Omega_H + eV_H, \qquad (44)$$

где

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2+a^2}, \quad V_H = -\frac{Qr_+}{r_+^2+a^2} \qquad (45)$$

— угловая скорость вращения и электрический потенциал на горизонте событий черной дыры (соответственно). Выражения (44)—(45) определяют химический потенциал ЧД. При $E<E_0$ скалярное произведение не является положительно-определенным вне горизонта событий, т. е. имеет место аналог парадокса Клейна. При этом радиальная компонента вектора Пойнтинга и плотность тока вблизи горизонта ($r\to r_+$) соответствуют потоку частиц от черной дыры:

$$\mathscr{P}_{(t)}{}^r = \omega j^r = -(E-E_0)\,|B|^2. \qquad (46)$$

В этом же случае происходит усиление волн, рассеивающихся на ЧД («сверхизлучение», см. [5, 8, 9]).

Если говорить о массивных частицах, то для них при $E<\mu c^2$ имеются квазисвязанные (резонансные) состояния с квазидискретным спектром энергий. При $E_0<E<\mu c^2$ из-за захвата частиц под горизонт ЧД они являются затухающими. Если же $E<\mu c^2<E_0$, то эти состояния становятся возбужденными [10—13]. Плотность вероятности и энергии в таких состояниях растет экспоненциально во времени ($\sim e^{\lambda t}$). В рамках одночастичной квантовой механики существование возбужденных состояний означает неустойчивость черных дыр к росту малых возмущений массивного скалярного поля.

На уровне вторично-квантованной теории это же обстоятельство указывает на существование процессов спонтанного рождения пар гравитационным и электромагнитным полями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Kerr R. P.//Phys. Rev. Lett. 1963. 11. P. 237. [2] Newman E. T. et al.//J. Math. Phys. 1965. 6. P. 918. [3] Chernikov N. A., Tagirov E. A.//Ann. Inst. Henri Poincare. 1968. 9, N 2. P. 109. [4] Шмутцер Э. Симметрии и законы сохра-

нения в физике. М., 1974. [5] Unruh W. G.//Phys. Rev. 1974. **D10**. P. 3194. [6] Carter B.//Phys. Rev. 1977. **D16**. P. 3395. [7] Walker M., Penrose R.// //Comm. Math. Phys. 1970. **18**. P. 265. [8] Зельдович Я. Б.//ЖЭТФ. 1972. **62**. С. 2076. [9] Hawking S. W.//Nature. 1974. **248**. P. 30. [10] Тернов И. М., Халилов В. Р., Чижов Г. А., Гаина А. Б.//Изв. вузов. Физика. 1978. **21**, № 9. С. 109; Тернов И. М., Гаина А. Б., Чижов Г. А.// Изв. вузов. Физика. 1980. **23**, № 8. С. 56; Гальцов Д. В., Померанцева Г. В., Чижов Г. А.//Изв. вузов. Физика. 1983. **26**, № 8. С. 75. [11] Zouros Th., Eardley D. M.//Ann. of Phys. (N. Y.). 1979. **118**. P. 139. [12] Detweiler S.//Phys. Rev. 1980. **D 22**. P. 2323. [13] Гаина А. Б., Тернов И. М.//Письма в Астрон. журн. 1986. **12**, № 12. С. 946; Гаина А. Б. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. (МГУ), 1981.

Поступила в редакцию
22.12.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 2

УДК 539.123.17

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ НЕЙТРИНО С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ МОМЕНТАМИ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Б. К. Керимов, Э. Н. Халилов, В. П. Цветков

(кафедра теоретической физики)

На основе метода волновых пакетов получено дифференциальное уравнение для нахождения амплитуды состояний $C_{L,R}$ дираковских нейтрино с фиксированной спиральностью и электромагнитными дипольными моментами (μ_ν, d_ν) в произвольном электромагнитном поле (E, H). Исследованы переходы $\nu_L \rightleftharpoons \nu_R$.

1. В настоящее время в ряду актуальных проблем физики нейтрино находятся и вопросы, связанные с электромагнитными свойствами этой частицы. В частности, широко обсуждается возможность существования у нейтрино магнитного и электрического дипольных моментов, что в свою очередь должно отразиться на спиральных свойствах частицы во внешнем электромагнитном поле.

Согласно электрослабым калибровочным теориям электромагнитные моменты (ЭММ) нейтрино могут быть пропорциональны массам как самих нейтрино, так и тяжелых виртуальных лептонов [1—3]. Для нейтрино, например, с массой $m_\nu = 30$ эВ теория допускает широкий интервал значений элементов матрицы ЭММ: от 10^{-17} $\mu_Б$ до 10^{-10} $\mu_Б$, где $\mu_Б = e\hbar/2m_e c$ — магнетон Бора. Ограничения на ЭММ, полученные из анализа лабораторных экспериментов по упругому $\bar{\nu}_e e^-$- и $\nu_\mu e^-$-рассеянию [4—7] и космологических аргументов [8, 9], близки к верхней оценке 10^{-11}—10^{-10} $\mu_Б$. В последнее время обсуждаются также возможности получения электрического дипольного момента (ЭДМ) нейтрино порядка $d_\nu \sim 10^{-11}$—10^{-10} $\mu_Б$ в теории суперструн с группой симметрии E_6 [10] и магнитного дипольного момента (МДМ) нейтрино $\mu_\nu \sim 10^{-11}$—10^{-10} $\mu_Б$ путем расширения стандартной $SU(2)\times U(1)$ модели за счет заряженного хиггсовского поля и правовинтовых нейтрино [11].

Несмотря на малые значения моментов μ_ν и d_ν, они могут явиться причиной изменения спиральности дираковского нейтрино $\nu_L \to \nu_R$ при движении в сильных электромагнитных полях сверхновых и нейтронных звезд [1, 12], а также Солнца [13]. В общем случае соотношение количества левых ν_L и правых ν_R нейтрино в пучке может зави-