нения в физике. М., 1974. [5] Unruh W. G.//Phys. Rev. 1974. **D10**. P. 3194. [6] Carter B.//Phys. Rev. 1977. **D16**. P. 3395. [7] Walker M., Penrose R.// //Comm. Math. Phys. 1970. **18**. P. 265. [8] Зельдович Я. Б.//ЖЭТФ. 1972. **62**. С. 2076. [9] Hawking S. W.//Nature. 1974. **248**. P. 30. [10] Тернов И. М., Халилов В. Р., Чижов Г. А., Гаина А. Б.//Изв. вузов. Физика. 1978. **21**, № 9. С. 109; Тернов И. М., Гаина А. Б., Чижов Г. А.// Изв. вузов. Физика. 1980. **23**, № 8. С. 56; Гальцов Д. В., Померанцева Г. В., Чижов Г. А.//Изв. вузов. Физика. 1983. **26**, № 8. С. 75. [11] Zouros Th., Eardley D. M.//Ann. of Phys. (N. Y.). 1979. **118**. P. 139. [12] Detweiler S.//Phys. Rev. 1980. **D 22**. P. 2323. [13] Гаина А. Б., Тернов И. М.//Письма в Астрон. журн. 1986. **12**, № 12. С. 946; Гаина А. Б. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. (МГУ), 1981.

Поступила в редакцию
22.12.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 2

УДК 539.123.17

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ НЕЙТРИНО С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ МОМЕНТАМИ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Б. К. Керимов, Э. Н. Халилов, В. П. Цветков

(кафедра теоретической физики)

На основе метода волновых пакетов получено дифференциальное уравнение для нахождения амплитуды состояний $C_{L,R}$ дираковских нейтрино с фиксированной спиральностью и электромагнитными дипольными моментами (μ_ν, d_ν) в произвольном электромагнитном поле (E, H). Исследованы переходы $\nu_L \rightleftarrows \nu_R$.

1. В настоящее время в ряду актуальных проблем физики нейтрино находятся и вопросы, связанные с электромагнитными свойствами этой частицы. В частности, широко обсуждается возможность существования у нейтрино магнитного и электрического дипольных моментов, что в свою очередь должно отразиться на спиральных свойствах частицы во внешнем электромагнитном поле.

Согласно электрослабым калибровочным теориям электромагнитные моменты (ЭММ) нейтрино могут быть пропорциональны массам как самих нейтрино, так и тяжелых виртуальных лептонов [1—3]. Для нейтрино, например, с массой $m_\nu = 30$ эВ теория допускает широкий интервал значений элементов матрицы ЭММ: от 10^{-17} $\mu_Б$ до 10^{-10} $\mu_Б$, где $\mu_Б = e\hbar/2m_e c$ — магнетон Бора. Ограничения на ЭММ, полученные из анализа лабораторных экспериментов по упругому $\bar{\nu}_e e^-$- и $\nu_\mu e^-$-рассеянию [4—7] и космологических аргументов [8, 9], близки к верхней оценке 10^{-11}—10^{-10} $\mu_Б$. В последнее время обсуждаются также возможности получения электрического дипольного момента (ЭДМ) нейтрино порядка $d_\nu \sim 10^{-11}$—10^{-10} $\mu_Б$ в теории суперструн с группой симметрии E_6 [10] и магнитного дипольного момента (МДМ) нейтрино $\mu_\nu \sim 10^{-11}$—10^{-10} $\mu_Б$ путем расширения стандартной $SU(2) \times U(1)$ модели за счет заряженного хиггсовского поля и правовинтовых нейтрино [11].

Несмотря на малые значения моментов μ_ν и d_ν, они могут явиться причиной изменения спиральности дираковского нейтрино $\nu_L \to \nu_R$ при движении в сильных электромагнитных полях сверхновых и нейтронных звезд [1, 12], а также Солнца [13]. В общем случае соотношение количества левых ν_L и правых ν_R нейтрино в пучке может зависеть как от конфигурации внешнего поля, так и от направления движения нейтрино [12].

Внешнее поле взаимодействует с нейтрино лишь в области локализации нейтрино. Поэтому математически строго можно описывать действие внешнего поля на динамику переворачивания спиральности нейтрино с электромагнитными моментами, используя метод волновых пакетов.

В адиабатическом приближении, когда $\nabla H(E)/H(E) \ll L^{-1}$ (L — ширина пакета), нами получены в аналитическом виде решения $C_{L,R}$ для амплитуды состояний, определяющие вероятности переходов $\nu_L \rightleftarrows \nu_R$. Рассмотрены, в частности, переходы $\nu_L \to \nu_R$ при движении нейтрино в постоянных однородных магнитном и электрическом скрещенных полях, а также в дипольном магнитном поле применительно к нейтрино от астрофизических объектов: сверхновых и нейтронных звезд, а также квазаров.

2. Движение массивного дираковского нейтрино с ЭММ μ_ν и d_ν во внешнем электромагнитном поле может быть описано с помощью уравнения Дирака

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = [-i(\alpha\nabla) + \rho_3 m_\nu + V_{em}]\,\psi, \tag{1}$$

в котором

$$V_{em} = (\mu_\nu - i d_\nu \rho_1)(\rho_3(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}) + \rho_2(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E})) \tag{1a}$$

определяет взаимодействие нейтрино с электромагнитным полем $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$; $\boldsymbol{\sigma}$ и ρ_i ($i=1, 2, 3$) — матрицы Дирака. Статические величины моментов нейтрино выражаем в единицах магнетона Бора: $\mu_\nu = \varkappa_\nu \mu_Б$, $d_\nu = \eta_\nu \mu_Б$.

Из решений уравнения Дирака для свободного нейтрино составим волновой пакет вида [14]:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=1,-1} C(s, t) \int d^3q\, a(\mathbf{q}-\mathbf{p})\, u(\mathbf{q}, s)\, e^{i(\mathbf{qr} - E_\nu(\mathbf{q})t)}, \tag{2}$$

где $u(\mathbf{q}, s)$ — спинорная амплитуда нейтрино, $a(\mathbf{q}-\mathbf{p})$ — амплитудный весовой множитель, $\mathbf{p}$ и $s=\pm 1$ — импульс и спиральность нейтрино; $s=-1$ для ν_L, $s=1$ для ν_R; $u^+(\mathbf{q}, s)u(\mathbf{q}, s) = 1$, а

$$\sum_s |C(s, t)|^2 = 1, \quad \int d^3q\, |a(\mathbf{q}-\mathbf{p})|^2 = 1.$$

В первом приближении, в котором пренебрегается расплыванием волнового пакета, что соответствует ограничению членами первого порядка малости по $|\mathbf{q}-\mathbf{p}|$, из (2) получаем

$$\psi(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s=1,-1} C(s, t)\, u(\mathbf{p}, s)\, e^{i(\mathbf{pr} - E_\nu t)}\, G(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \tag{3}$$

где

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{v}t) = \int d^3q\, a(\mathbf{q})\, e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{p}/E, \quad E_\nu = \sqrt{p^2 + m_\nu^2}.$$

Функция $G(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)$ характеризует амплитуду волнового пакета. В данном приближении нейтринный волновой пакет движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}$, не расширяясь и не изменяя формы. Для нас существенно, чтобы расплывание волнового пакета было малым в области действия внешнего электромагнитного поля на нейтрино.

Подставляя (2) в уравнение (1), получаем дифференциальное уравнение для нахождения коэффициентов $C(s, t)$, определяющих вероятность состояний нейтрино с фиксированной спиральностью:

$$\frac{d}{dt} C(s, t) = -i(2\pi)^{-3} \sum_{s'=1,\,-1} C(s', t) \int d^3q' d^3q \int d^3r \times$$

$$\times a^*(\mathbf{q}'-\mathbf{p})\, a(\mathbf{q}-\mathbf{p})\, u^+(\mathbf{q}', s)\, V_{em} u(\mathbf{q}, s')\, e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\mathbf{r}} e^{i(E_\nu(\mathbf{q}')-E_\nu(\mathbf{q}))t}. \qquad (4)$$

Однако в практических приложениях приходится иметь дело с более простой формой уравнения (4). Так, если электромагнитное поле достаточно плавно меняется на расстоянии порядка размеров волнового пакета (для пакета ширины L в магнитном поле H это означает $\nabla H/H \ll L^{-1}$), уравнение (4) с помощью (3) приводится к виду

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} C_L \\ C_R \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{eF}) \\ (\mathbf{eF})^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_L \\ C_R \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где

$$\mathbf{F} = \sqrt{2}(\mu_\nu + i d_\nu)\,[\mathbf{H}(\mathbf{r}=\mathbf{v}t, t) - i\mathbf{E}(\mathbf{r}=\mathbf{v}t, t)].$$

Здесь $C_L = C(s=-1, t)$, $C_R = C(s=1, t)$; $\mathbf{e}$ — циркулярный орт, перпендикулярный импульсу нейтрино и зависящий от его сферических углов [12]. Если все образующиеся в космических условиях нейтрино левополяризованные ($s=-1$), то (5) следует решать со следующими начальными условиями: $C_L(0)=1$, $C_R(0)=0$.

Решение уравнения (5) в общем случае может быть представлено в виде так называемого мультипликативного интеграла [15]:

$$\begin{pmatrix} C_L \\ C_R \end{pmatrix} = \widehat{\int_{t_0}^{t}} \left\{ E - i \begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{eF}) \\ (\mathbf{eF})^+ & 0 \end{pmatrix} dt \right\} \begin{pmatrix} C_L(t_0) \\ C_R(t_0) \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где E — единичная матрица. Мультипликативный интеграл определяется как предел интегрального произведения, аналога интегральной суммы для обычного интеграла:

$$\widehat{\int_{t_0}^{t}} (E + P(t)\,dt) = \lim_{\Delta t_k \to 0} [E + P(t_n)\,dt_n] \ldots [E + P(t_k)\,dt_k] \ldots [E + P(t_1)\,dt_1], \qquad (7)$$

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad t_0 = t_1 < \ldots < t_k < \ldots < t_n = t,$$

где $P(t)$ — матричная функция, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Специфика мультипликативного интеграла связана с неперестановочностью между собой значений подынтегральной матричной функции в разные моменты времени. В том же случае, когда все эти значения перестановочны между собой:

$$P(t')P(t'') = P(t'')P(t'), \quad (t', t'' \in [t_0, t]), \qquad (8)$$

мультипликативный интеграл сводится к матрице

$$\widehat{\int_{t_0}^{t}} (E + P\,dt) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} P\,dt\right). \qquad (9)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только матричные функции, которые удовлетворяют условию (8). Для рассматриваемой нами задачи

$$P(t) = -i\begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{eF}) \\ (\mathbf{eF})^{+} & 0 \end{pmatrix} = -i\{\mathrm{Re}(\mathbf{eF})\,\sigma_1 - \mathrm{Im}(\mathbf{eF})\,\sigma_2\}, \tag{10}$$

где σ_1, σ_2 — матрицы Паули. Из (10) следует, что условие (8) выполняется, если

$$\mathrm{Im}(\mathbf{eF})/\mathrm{Re}(\mathbf{eF}) = k = \mathrm{const}. \tag{11}$$

В этом случае из (6) находим

$$\begin{pmatrix} C_L \\ C_R \end{pmatrix} = \left[\cos\omega(t, t_0) - i\,\frac{\sigma_1 - k\sigma_2}{(1+k^2)^{1/2}}\,\sin\omega(t, t_0)\right]\begin{pmatrix} C_L(t_0) \\ C_R(t_0) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где

$$\omega(t, t_0) = \sqrt{1+k^2}\int\limits_{t_0}^{t}\mathrm{Re}(\mathbf{eF})\,dt.$$

Решение (12) будет иметь место и при движении нейтрино в однородных и постоянных магнитном и электрическом полях. При движении нейтрино с ЭММ μ_ν и d_ν в таких полях вероятность перехода левополяризованного нейтрино ν_L в правополяризованное ν_R будет определяться формулой, следующей из (12):

$$|C_R|^2 = 1 - |C_L|^2 = \sin^2\{t\sqrt{\mu_\nu^2 + d_\nu^2}\,([\mathbf{Hn}]^2 + [\mathbf{En}]^2 + 2(\mathbf{n}[\mathbf{HE}]))^{1/2}\}, \tag{13}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении движения нейтрино.

Из (13) следует, что вероятность перехода $\nu_L \to \nu_R$ определяется суммой квадратов моментов μ_ν и d_ν нейтрино. Если внешнее поле является только магнитным ($\mathbf{E}=0$) или только электрическим ($\mathbf{H}=0$), то максимальное изменение спиральности будет иметь место при движении нейтрино в перпендикулярном полям направлении: $\mathbf{n}\perp\mathbf{H}$ или $\mathbf{n}\perp\mathbf{E}$. При движении нейтрино вдоль направления магнитного $\mathbf{n}\parallel\mathbf{H}$ или электрического $\mathbf{n}\parallel\mathbf{E}$ поля изменение спиральности не происходит.

Для скрещенных полей $\mathbf{E}\perp\mathbf{H}$, $|\mathbf{E}|=|\mathbf{H}|$ спиральность нейтрино сохраняется при $\mathbf{n}\parallel[\mathbf{EH}]$ и наиболее быстро меняется на противоположное значение при $\mathbf{n}\uparrow\downarrow[\mathbf{EH}]$.

Для проведения числовых оценок формулы (13) удобно записать в виде

$$|C_R|^2 = \sin^2\{1{,}2\cdot 10^{10}\,l\,(\mu_Б H_0)^{-1}\sqrt{\mu_\nu^2 + d_\nu^2}\,([\mathbf{Hn}]^2 + [\mathbf{En}]^2 + 2(\mathbf{n}[\mathbf{HE}]))^{1/2}\}, \tag{14}$$

где l — длина пробега нейтрино с места его рождения в сантиметрах, $H_0 = m_e^2/e \simeq 4{,}41\cdot 10^{13}$ Гс — швингеровское магнитное поле. Как следует из (14), применительно к нейтрино от нейтронных звезд ($R \simeq 10^6$ см) и при $\mu_\nu \sim 10^{-11}\,\mu_Б$, $d_\nu \sim 10^{-11}\,\mu_Б$, что не противоречит приведенным выше астрофизическим данным, для того, чтобы имели место интенсивные переходы $\nu_L \to \nu_R$, достаточно наличия у космического объекта магнитного поля напряженностью порядка $H \sim (10^{-4} - 10^{-5})H_0$.

Положив в (11) $k=d_\nu/\mu_\nu$, можно точно решить задачу в случае движения нейтрино из центра протяженного магнитного диполя радиуса R [12]:

$$\mathbf{H}=\begin{cases}\mathbf{H}_0=\mathrm{const}, & r\leqslant R,\\ \dfrac{3\mathbf{r}(\vec{\mathfrak{M}}\mathbf{r})-r^2\vec{\mathfrak{M}}}{r^5}, & r>R,\end{cases} \qquad (15)$$

где $\vec{\mathfrak{M}}$ — магнитный момент, R — радиус диполя, $\mathbf{H}_0=2\vec{\mathfrak{M}}/R^3$. В этом случае находим:

$$|C_R|^2=1-|C_L|^2=\sin^2\left(\frac{3}{4}\sqrt{\mu_\nu^2+d_\nu^2}\,H_0R\sin\theta_\nu\right), \qquad (16)$$

где θ_ν — угол между направлениями движения нейтрино и внутреннего магнитного поля диполя. Дипольное магнитное поле типа (15) характерно для большинства астрофизических объектов, в том числе и для квазаров, у которых, согласно теоретическим моделям, $R\sim 10^{17}$ см, $H\sim 10^5$ Гс [16]. Оценки с помощью формулы (16) позволяют утверждать, что в случае потока нейтрино от квазаров эффект переходов $\nu_L\to\nu_R$ может стать заметным уже при μ_ν, $d_\nu\sim 10^{-17}$—10^{-16} $\mu_Б$.

И наконец, в случае движения нейтрино в поле электрического или магнитного заряда (монополя) имеем

$$|C_R|^2=1-|C_L|^2=\sin^2[q(m)\sqrt{\mu_\nu^2+d_\nu^2}/\rho], \qquad (17)$$

где $q(m)$ — значение электрического (магнитного) заряда, ρ — минимальное расстояние от заряда до траектории движения нейтрино.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Fujikawa K., Shrook R. E.//Phys. Rev. Lett. 1980. **45**. P. 963. [2] Beg M. A. B., Marciano W. J., Ruderman M.//Phys. Rev. 1978. **D 17**. P. 1395. [3] Mohapatra R. N., Marshak R. E.//Phys. Lett. 1980. **91 B**. P. 222. [4] Reines F., Gurr H., Sobel H.//Phys. Rev. Lett. 1976. **37**. P. 315. [5] Abe K., Ahrens L. A. et al.//Phys. Rev. Lett. 1987. **58**. P. 636. [6] Kerimov B. K., Safin M. Yu., Haidar N., Tikhomirov A. M.//VII Intern. Symp. on High Energy Spin Physics. Protvino 22—27 September 1986. Серпухов, 1987. V. II. P. 51. [7] Керимов Б. К., Сафин М. Я., Хайдар Н.//Тез. докл. 37-го Совещ. по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. Л., 1987. С. 229; Изв. АН СССР, сер. физ. 1988. **52**. С. 136. [8] Morgan J. A.//Phys. Lett. 1981. **102 B**. P. 247. [9] Morgan J. A., Farrant D. B.//Phys. Lett. 1983. **128 B**. P. 431. [10] Grifols J. A., Sola J.//Phys. Lett. 1987. **189 B**. P. 63. [11] Babu K. S., Mathur V. S.//Phys. Lett. 1987. **196 B**. P. 218. [12] Керимов Б. К., Халилов Э. Н., Цветков В. П.//Тр. II Междунар. семинара по спиновым явлениям в физике высоких энергий. Протвино, 1984. Серпухов, 1985. С. 265; Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1985. **26**, № 6. С. 21. [13] Волошин М. Б., Высоцкий М. И., Окунь Л. Б.// //ЖЭТФ. 1986. **91**. С. 754. [14] Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. М., 1976. [15] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967. [16] Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. М., 1981.

Поступила в редакцию
30.12.87