На рис. 3 приведены типичные зависимости заряда, захваченного на ПС границы $Si—SiO_2$, от расстояния (по энергии) до потолка валентной зоны кремния. По наклону этих кривых определены значения плотности ПС вблизи края валентной зоны: $N_{ss} \simeq 5 \cdot 10^{11}$ $эВ^{-1} \cdot см^{-2}$ до облучения электронами и $N_{ss} \simeq 4 \cdot 10^{12}$ $эВ^{-1} \cdot см^{-2}$ после воздействия пучка электронов дозой 10^{17} электрон$\cdot см^{-2}$. Отсюда можно заключить, что «хвосты» плотности ПС вблизи краев запрещенной зоны кремния имеют в основном «флуктуационную» природу. Относительно электронных состояний вблизи середины запрещенной зоны можно с полной уверенностью утверждать, что их возникновение не связано с флуктуационной неоднородностью границы раздела $Si—SiO_2$. Действительно, даже после высокодозовых воздействий, когда $\sigma_s \approx 3$, вероятность появления потенциальной ямы глубиной 0,5—0,6 эВ ничтожно мала ($\sim 10^{-10}$—10^{-11}).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Козлов С. Н., Невзоров А. Н., Чайковская Т. Г.//Микроэлектроника. 1986. 15, № 3. С. 283. [2] Simonne J. J.//Solid State Electron. 1973. 16, N 1. P. 121. [3] Arnold E.//IEEE Trans. El. Dev. 1968. ED-15, N 12. P. 1003. [4] Венкстерн С. А., Козлов С. Н., Золотарев В. И.//Электронная техника. Сер. 2. 1979. № 1 (127). С. 33. [5] Козлов С. Н., Невзоров А. Н., Потапов А. Ю.// //Математическое моделирование и экспериментальное исследование электрической релаксации в элементах микросхем. М., 1986. С. 40. [6] Brews J. R.//J. Appl. Phys. 1975. 46, N 5. P. 2193.

Поступила в редакцию
11.11.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 2

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.1:524.3/4—32

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ В ЗВЕЗДНОЙ ДИНАМИКЕ

Г. И. Ширмин

(ГАИШ)

Предложено новое астрономическое приложение классической задачи двух неподвижных центров, состоящее в использовании ее решения для расчета тесных сближений звезд с ядрами шаровых звездных скоплений с учетом притяжения звезд к ядру Галактики.

Звезднодинамические приложения обобщенной задачи двух неподвижных центров впервые были предложены В. К. Кайсиным. Так, в работе [1] в рамках упомянутой модели им выполнен анализ движения отдельной звезды в периферийной зоне стационарной однородной звездной системы, ядро которой имеет форму тела вращения, и исследованы формы звездных орбит. В работе [2] рассмотрена задача о движении звезды в поле тяготения эллиптической галактики или шарового звездного скопления с центральным осесимметричным ядром. Известно, что у таких звездных систем до 80% общей массы может быть сосредоточено в ядре, вследствие чего необходимо учитывать его несферичность. Это достигается аппроксимацией гравитационного потенциала ядра силовой функцией задачи двух неподвижных центров с вещественными массами, расположенными на оси аппликат симметрично относительно начала координат на мнимом расстоянии друг от друга. В. К. Кайсиным показано, что движение отдельной звезды имеет условно-периодический характер, и, с учетом влияния короны, выведены формулы для координат звезды в виде рядов по степеням малого параметра, аналогичного эксцентриситету.

Что же касается звезднодинамических приложений классической задачи двух неподвижных центров, то возможность таковых указана еще Шарлье [3]. Последний в качестве возможного примера использования модели двух неподвижных центров для изучения орбит небесных тел назвал случай пролета малого тела через двойную систему. Ясно, что в качестве такой системы может быть принята двойная звезда.

Еще одно возможное приложение связано с использованием классической задачи двух неподвижных центров для расчета тесных сближений звезд галактического поля с ядрами шаровых звездных скоплений. При этом под тесным сближением подразумевается прохождение звезды через сферу действия ядра шарового скопления. В качестве неподвижных центров в этом случае фигурируют ядра Галактики и шарового звездного скопления.

Рассмотрим движение звезды P массы m в ньютоновом гравитационном поле ядра шарового скопления P_1 с массой m_1 и ядра Галактики P_0 с массой m_0. Поскольку речь идет о близком прохождении, то очевидно, что наряду с неравенством $m \ll m_1$ в рассматриваемом случае можно считать также выполненным и условие $n' \gg n$, где n' — среднее движение звезды, а n — угловая скорость орбитального движения шарового скопления вокруг центра Галактики. При упомянутых выше условиях для изучения движения звезды в достаточной близости с ядром скопления допустимо использование промежуточной орбиты, базирующейся на решении классической задачи двух неподвижных центров.

Пусть $Oxyz$ — система неподвижных декартовых координат с началом O в середине отрезка P_0P_1, с плоскостью галактоцентрической орбиты шарового скопления в качестве основной плоскости Oxy и с осью абсцисс Ox, положительно ориентированной в направлении на шаровое скопление P_1. Тогда дифференциальные уравнения движения звезды запишутся в виде

$$\ddot{x} = U'_x, \quad \ddot{y} = U'_y, \quad \ddot{z} = U'_z, \tag{1}$$

где U — силовая функция ньютоновского притяжения двух неподвижных центров:

$$U = f\left[\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1}\right]. \tag{2}$$

В выражении (2) через f обозначена постоянная тяготения, а через r_0 и r_1 — расстояния от P до P_0 и P_1 соответственно, так что

$$r_0^2 = (x+c)^2 + y^2 + z^2, \quad r_1^2 = (x-c)^2 + y^2 + z^2, \tag{3}$$

причем через c обозначена половина расстояния между P_0 и P_1. Для наших целей достаточно воспользоваться частным решением пространственной задачи двух неподвижных центров, соответствующим движениям параболического типа. Это частное решение может быть построено, например, по «методу неполного интеграла» [4].

Введем вместо x, y и z вытянутые эллипсоидальные координаты λ, μ и w с помощью формул преобразования

$$x=c\lambda\mu,\quad y=c\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1-\mu^2}\sin w,\quad z=c\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1-\mu^2}\cos w, \tag{4}$$

где λ, μ и w удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\lambda\geqslant 1,\quad |\mu|\leqslant 1,\quad 0\leqslant w\leqslant 2\pi. \tag{5}$$

В новых переменных гамильтониан H имеет вид

$$H=T-U, \tag{6}$$

где T — кинетическая энергия:

$$T=\frac{1}{2c^2}\left[\frac{(\lambda^2-1)}{(\lambda^2-\mu^2)}p_\lambda^2+\frac{(1-\mu^2)}{(\lambda^2-\mu^2)}p_\mu^2+\frac{1}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}p_w^2\right], \tag{7}$$

а U — силовая функция:

$$U=(D\lambda-A\mu)/(\lambda^2-\mu^2). \tag{8}$$

Здесь p_λ, p_μ и p_w — обобщенные импульсы, сопряженные с обобщенными координатами λ, μ и w, а через D и A обозначены постоянные: $D=f(m_0+m_1)/c$, $A=f(m_0-m_1)/c$. Каноническим уравнениям с гамильтонианом (6):

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\lambda},\quad \frac{d\mu}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\mu},\quad \frac{dw}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_w},$$

$$\frac{dp_\lambda}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\lambda},\quad \frac{dp_\mu}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\mu},\quad \frac{dp_w}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial w}$$

соответствует дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2c^2(\lambda^2-\mu^2)}\left[(\lambda^2-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)^2+(1-\mu^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda^2-\mu^2)}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)^2\right]-\frac{(D\lambda-A\mu)}{(\lambda^2-\mu^2)}=0. \tag{9}$$

Последнее уравнение имеет частное решение, без труда находимое разделением переменных и имеющее вид

$$\psi=\chi_1(\lambda,\ \alpha_2)+\chi_2(\mu,\ \alpha_2)+\alpha_3 w, \tag{10}$$

где

$$\chi_1(\lambda)=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\sqrt{2\Lambda(\lambda)}}{(\lambda^2-1)}\,d\lambda,\quad \chi_2=\int\limits_{0}^{\mu}\frac{\sqrt{2M(\mu)}}{(1-\mu^2)}\,d\mu, \tag{11}$$

причем

$$\begin{aligned}\Lambda(\lambda)&=(\lambda^2-1)\left(c^2D\lambda+\frac{1}{2}\alpha_2^2\right)-\frac{1}{2}\alpha_3^2,\\ M(\mu)&=(\mu^2-1)\left(c^2A\mu+\frac{1}{2}\alpha_2^2\right)-\frac{1}{2}\alpha_3^2,\end{aligned} \tag{12}$$

где α_2 и α_3 — произвольные постоянные. Заметим, что нижние пределы λ_0 и μ_0 в интегралах (11) выбраны из условий

$$\Lambda(\lambda_0)=0,\ M(\mu_0)=0.$$

При таком выборе λ_0 и μ_0 в решении (10) уравнения Гамильтона — Якоби (9) не появляется других независимых констант интегрирования, отличных от α_2 и α_3. Частное решение (10) не обладает свойствами полного интеграла дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, так как содержит константы интегрирования в числе, меньшем числа степеней свободы. Однако оно удовлетворяет определению неполного интеграла в смысле Леман-Филе [5] для уравнения Гамильтона—Якоби (9). Согласно теореме Леман-Филе [6], неполный интеграл (10) позволяет с помощью операций, не сложнее дифференцирования, найти три инвариантных соотношения канонических уравнений движения:

$$p_\lambda = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \quad p_\mu = \frac{\partial\psi}{\partial\mu}, \quad p_w = \frac{\partial\psi}{\partial w} \tag{13}$$

и два первых интеграла:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} = \beta_i \quad (i = 2, 3). \tag{14}$$

Формулы (13) и (14) позволяют свести интегрирование уравнений Гамильтона к следующим квадратурам:

$$\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{2\Lambda(\lambda)}} = \tau - \tau_0, \quad \int\limits_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{2M(\mu)}} = \tau - \tau_0, \tag{15}$$

где τ — регуляризованное время, введенное вместо t в качестве независимой переменной. Обратив квадратуры (15), мы с помощью зависимостей $\lambda = \lambda(\tau)$ и $\mu = \mu(\tau)$ приведем определение эллипсоидальной координаты w и времени t к следующим квадратурам:

$$w - w_0 = \alpha_3 \left\{ \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{[\lambda^2(\tau) - 1]} + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{[1 - \mu^2(\tau)]} \right\}, \tag{16}$$

$$t - t_0 = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} [\lambda^2(\tau) - \mu^2(\tau)]\, d\tau, \tag{17}$$

где w_0 и t_0 — начальные значения величин w и t, соответствующие $\tau = \tau_0$. Приведенные выше квадратуры (15)—(17) представляют собой частное решение классической задачи двух неподвижных центров, соответствующее пространственным движениям параболического типа. Последнее утверждение вытекает из выражения (10) для неполного интеграла, в котором отсутствует постоянная интеграла энергии дифференциальных уравнений движения.

Из формул (12) видно, что квадратуры (15) относятся к классу эллиптических, а потому могут быть обращены в эллиптических функциях. Ниже приводится результат обращения квадратур (15) в эллиптических функциях Якоби. Область значений произвольных постоянных интегрирования α_2 и α_3^2, соответствующих реальным движениям параболического типа, определяется неравенствами

$$-\infty < \alpha_2 < A, \quad \frac{1}{2}\alpha_3^2 \leqslant f^*(\alpha_2), \tag{18}$$

$$f^*(\alpha_2) = -\frac{8}{9}\alpha_2 + \frac{2}{27A^2}\left(\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 3A^2}\right)(\alpha_2^3 + 3A^2). \tag{19}$$

На плоскости параметров α_2 и α_3^2 в пределах области, ограниченной неравенствами (18), вытянутые эллипсоидальные координаты λ и μ выражаются как функции независимой переменной τ с помощью якобиевых эллиптических функций.

Обозначим через λ_i и μ_i ($i=1, 2, 3$) вещественные корни уравнений третьей степени:

$$\Lambda(\lambda)=0, \quad M(\mu)=0, \tag{20}$$

левые части которых определяются формулами (12). Пусть далее

$$\begin{aligned}
\lambda^* &= \min(\lambda_2, \lambda_3) = \begin{cases} \lambda_2, & \alpha_2 \in (-\infty, -D], \\ \lambda_3, & \alpha_2 \in (-D, +A], \end{cases} \\
\bar{\lambda} &= \max(\lambda_2, \lambda_3) = \begin{cases} \lambda_3, & \alpha_2 \in (-\infty, -D], \\ \lambda_2, & \alpha_2 \in (-D, +A], \end{cases}
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\mu^* &= \min(\mu_2, \mu_3) = \begin{cases} \mu_2 & (-\infty < \alpha_2 \leqslant -A), \\ \mu_3 & (-A < \alpha_2 \leqslant +A), \end{cases} \\
\bar{\mu} &= \max(\mu_2, \mu_3) = \begin{cases} \mu_3 & (-\infty < \alpha_2 \leqslant -A), \\ \mu_2 & (-A < \alpha_2 \leqslant +A). \end{cases}
\end{aligned} \tag{22}$$

Тогда соответствующие формулы для λ и μ таковы:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= [\bar{\lambda} - \lambda^* \operatorname{sn}^2(v, k)]/\operatorname{cn}^2(v, k), \\
\mu &= \mu_1 + (\mu^* - \mu_1)\operatorname{sn}^2(\theta, \varkappa),
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

где

$$v = s(\tau - \tau_0), \quad \theta = \sigma(\tau - \tau_0), \tag{24}$$

а

$$s = \sqrt{\frac{D}{2}(\bar{\lambda} - \lambda_1)}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{A}{2}(\mu^* - \mu_1)}. \tag{25}$$

Через k и $\varkappa$ обозначены модули эллиптических интегралов Лежандра, определяемые выражениями

$$k^2 = \frac{\lambda^* - \lambda_1}{\bar{\lambda} - \lambda_1}, \quad \varkappa^2 = \frac{\mu^* - \mu_1}{\bar{\mu} - \mu_1}. \tag{26}$$

С помощью зависимостей $\lambda=\lambda(\tau)$ и $\mu=\mu(\tau)$, задаваемых формулами (23), квадратуры для эллипсоидальной координаты w и времени t могут быть выражены через якобиевы эллиптические функции и эллиптические интегралы Лежандра первого, второго и третьего рода. Мы не приводим соответствующих выражений из-за их громоздкости.

В заключение заметим, что в существующих публикациях по задаче двух неподвижных центров результаты обращения квадратур, образующих решение, как правило, отсутствуют. Исключение составляет работа В. Г. Демина [7], в которой приведены выражения для эллипсоидальных координат как функций регуляризованного времени, соответствующих наиболее интересным плоским орбитам эллиптического типа. Приведенные выше формулы для пространственных движений параболического типа классической задачи двух неподвижных центров получены впервые.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кайсин В. К.//Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР. 1970. 12, № 2 (135). С. 162. [2] Кайсин В. К. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1971. [3] Шарлье К. Небесная механика. М., 1966. [4] Добронравов В. В. Основы аналитической механики. М., 1976. [5] Lehmann-Files R.//Astr. Nachr. 1904. 165, N 3950. P. 209. [6] Чуев М. А.//Дифф. уравнения. 1975. 11, № 12. С. 2183. [7] Демин В. Г.// //Астрон. журн. 1960. 37, № 6. С. 1068.

Поступила в редакцию 04.11.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 2

УДК 524.834

ИСКАЖЕНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ РЕЛИКТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫМИ ЛИНЗАМИ

М. В. Сажин

(ГАИШ)

Показано, что после прохождения в гравитационном поле галактик флуктуации реликтового излучения меняют свою статистику. Статистика выбросов δT после прохождения вблизи галактики изменяется так, что появляется степенное распределение. Это тождественно появлению нового поколения радиоисточников.

Сравнительно недавно была открыта первая гравитационная линза [1], хотя предсказания о ее существовании были сделаны свыше 40 лет назад [2—5]. Для появления линзы необходимо, чтобы далекий источник и тяготеющий центр с массой M разделял угол не больше чем $\sqrt{GM/bc^2}$, где b — радиус непрозрачности тела M. Естественно, что вероятность такого близкого соседства на небесной сфере двух объектов не слишком велика. Тем не менее довольно давно [6—8] стало понятно, что гравитационные линзы могут менять свойства подсчетов далеких объектов. Хотя линза не меняет поверхностной яркости объекта, она меняет телесный угол, под которым виден объект и, как следствие, меняется видимая светимость объекта. Вопрос об изменении статистики квазаров из-за этого механизма особенно подробно изучался в последние годы [9—12].

Существует источник, который лежит как угодно близко к любой галактике, т. е. к гравитационной линзе, равномерно заполняя все небо, — это реликтовое излучение. Если бы это излучение было изотропно, то после прохождения набора гравитационных линз оно также осталось бы изотропным. Однако реликтовое излучение должно обладать слабой анизотропией. Есть по крайней мере четыре механизма, которые должны приводить к образованию флуктуаций реликтового излучения. Кратко перечислим их. Это эффект Сакса — Вольфа, эффект Силка, эффект Сюняева — Зельдовича и образование анизотропии из-за доплер-эффекта неоднородных скоростей, нормальных лучу зрения. Другими словами, должны быть так называемые флуктуации реликтового излучения δT. Влияние гравитационных линз на реликтовое излучение можно разделить на два типа. Первый — формирование флуктуаций δT из изотропного распределения температуры по небу из-за нестационарности Вселенной. Второй — искажение уже имеющихся флуктуаций при прохождении фотонов реликтового излучения вблизи линз. Сосредоточимся на втором типе влияния.