

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.43:528.854:681.3

**МЕТОДЫ РЕДУКЦИИ В ЗАДАЧАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ ПО НАБОРУ ЕЕ ВИДЕОИЗОБРАЖЕНИЙ**

А. П. Иванов, Ю. П. Пытьев

*(кафедра физики атмосферы и математической геофизики)*

С помощью метода редукции измерений построен алгоритм восстановления формы самосветящейся поверхности по набору ее видеоизображений. Попутно построен алгоритм синтеза на ЭВМ по тому же набору любых других видеоизображений этой же поверхности.

При обработке данных аэрокосмических наблюдений одним из наиболее трудоемких процессов является составление топографических карт местности по ее изображениям, полученным с помощью различных фотосистем. В данной работе рассматривается математическая модель формирования изображения подстилающей поверхности и дается методика автоматизации восстановления формы светящейся поверхности с использованием ЭВМ. В рамках той же модели формирования изображения решается задача синтеза на ЭВМ набора видеоизображений фрагмента поверхности с различных точек наблюдения в том случае, когда единственной доступной информацией о поверхности является другой набор изображений, который был получен при нескольких различных положениях фотосистемы. Синтезированный набор включает в себя изображения, которые могли бы быть получены при любых других, «виртуальных» положениях объектива оптической системы. Численный эксперимент по проверке методик решения обеих задач продемонстрировал достаточную эффективность построенных алгоритмов.

**Математическая модель регистрации изображений.** Процесс регистрации изображения может быть разбит на три этапа: излучение света объектом (поверхностью), формирование изображения оптической системой (ОС) и преобразование интенсивности света в дискретный электрический сигнал регистрирующим устройством, служащим звеном связи с ЭВМ. Далее предполагается, что:

1) объектив ОС достаточно удален от поверхности, так что изображение формируется (в соответствии с законами геометрической оптики) в фокальной плоскости системы, а поперечное увеличение постоянно по полю зрения;

2) можно не учитывать турбулентность и рассеяние воздушной среды, а также различные искажения и аберрации, связанные с оптической системой, т. е. ОС предполагается идеальной;

3) любая точка рассматриваемого фрагмента поверхности видна на каком-либо изображении исходного набора.

Регистрирующее устройство состоит из экрана, разбитого на ячейки светочувствительных элементов, и устройства ввода их выходных сигналов в ЭВМ. Экран регистрирующего устройства совмещен с фокальной плоскостью ОС.

Введем две системы координат. Первая связана с поверхностью, координаты точек которой выражаются в этой системе координат как

$(x, y, z(x, y))$ , а координаты объектива ОС фиксированы и равны  $(q_1, q_2, q_3)$ . Ось оптической системы  $PP'$  параллельна оси  $OZ$  (рис. 1). Вторая система координат  $W_1PW_2$  связана с экраном регистрирующего устройства. Ее начало совпадает с точкой фокуса ОС, а оси  $PW_1$  и  $PW_2$  направлены противоположно осям  $OX$  и  $OY$  соответственно.

Наконец, что касается подстилающей поверхности, пусть ее форма такова, что ни на одном изображении не наблюдается эффект «самозакрывается» поверхности. Другие предположения о ее геометрических свойствах будут введены ниже. Кроме того, будем считать, что поверхность самосветящаяся и зависимость интенсивности излучения световой энергии от точки поверхности и направления излучения выражается функцией яркости вида  $B(x, y, \cos \theta) = A(x, y)Y(\cos \theta)$ , где  $A(x, y)$  — так называемая скалярная яркость,  $Y(\cos \theta)$  — индикатриса излучения,  $\theta$  — угол между нормалью к поверхности в данной точке  $(x, y)$  и направлением излучения (направлением на объектив — см. рис. 1). Индикатрисы часто представляют в виде  $Y(\cos \theta) = \cos^\lambda \theta$ , где  $\lambda$  — показатель индикатрисы. Связь освещенности регистрирующей ячейки с яркостью поверхности дается следующей формулой [1, 2]:

$$I(w_1, w_2) = \frac{\pi}{4(k_d)^2} \cos^\gamma \beta \cdot B(x, y, \cos \theta), \quad (1)$$

где

$$w_1 = M(x - q_1), \quad w_2 = M(y - q_2), \quad M = f / (q_3 - z), \quad (2)$$

$M$  — поперечное увеличение ОС;  $k_d$  — диафрагменное число;  $\beta$  — угол между оптической осью  $PP'$  и направлением на соответствующий элемент поверхности (см. рис. 1);  $\gamma$  — показатель светораспределения по полю зрения, для идеальной ОС  $\gamma = 3$ . В реальных ОС  $\gamma$  обычно значительно меньше за счет выбора специальной конструкции объектива. Координаты экранных ячеек фиксированы и выражаются следующим образом:  $(w_1)_i = \Delta \cdot i$ ,  $(w_2)_j = \Delta \cdot j$ , где  $i, j = -N, \dots, 0, \dots, N$ ,  $\Delta \times \Delta$  — размеры светочувствительной ячейки. Учитывая (2), получим  $x_i = (\Delta/M)i + q_1$ ,  $y_j = (\Delta/M)j + q_2$  — координаты элемента поверхности, соответствующего  $(i, j)$ -й экранной ячейки. Подставляя эти выражения в (1), учитывая структуру функции яркости и выражая косинусы углов через координаты соответствующих точек, получим зависимость электрического сигнала на выходе ячейки от яркости и формы поверхности в следующем виде:

$$I_{ij} = C_0 (\delta^2 + i^2 + j^2)^{-\left(\frac{\gamma + \lambda}{2}\right)} \cdot A_{ij} \cdot \left( \frac{z_x i + z_y j + \delta}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} \right)^\lambda + v_{ij}, \quad (3)$$

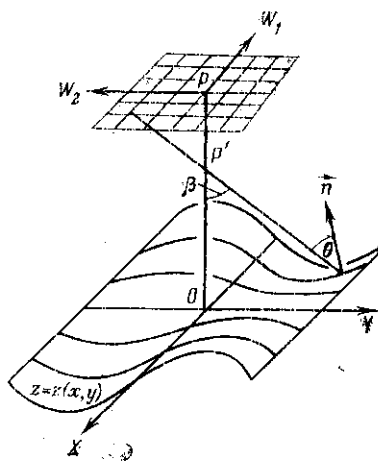


Рис. 1. Схема регистрации изображения:  $PP'$  — оптическая ось,  $\vec{OP}' = (q_1, q_2, q_3)$  — положение объектива ОС,  $|PP'| = f$  — фокусное расстояние ОС,  $\vec{n}$  — нормаль к поверхности,  $(W_1PW_2)$  — экран ОС

где

$$I_{ij} = I((w_1)_{ij}, (w_2)_{ij}), \quad A_{ij} = A(x_i, y_j), \quad z_x = \frac{\partial z}{\partial x}(x_i, y_j),$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y}(x_i, y_j), \quad \delta = f/\Delta = \text{const}, \quad C_0 = c \frac{\pi \delta^2}{4(k_d)^2} = \text{const},$$

$c$  — коэффициент чувствительности ячейки,  $v_{ij}$  — шум, возникающий в ячейке, который предполагается гауссовским с нулевым математическим ожиданием и известной дисперсией  $\sigma^2$ .

Полученная формула дает при  $\lambda \neq 1$  нелинейную зависимость сигнала от вектора нормали

$$\mathbf{n} = \left( \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right)$$

к поверхности. Рассмотрим класс линейных моделей регистрации изображения, зависящих от параметров линеаризации  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ :

$$I_{ij} = (C_{ij}, \mathbf{f}) + v_{ij}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{f} = (A_{ij} \cdot (z_x)_{ij}, A_{ij} \cdot (z_y)_{ij}, A_{ij}) \quad (4a)$$

— входной сигнал, не зависящий от положения объектива;

$$C_{ij} = C_0 (\delta^2 + i^2 + j^2)^{-\frac{(\gamma+\lambda)}{2}} \cdot \delta^\lambda \cdot \left( \frac{\lambda i \alpha_1}{\delta}, \frac{\lambda j \alpha_2}{\delta}, \alpha_3 \right) \in \mathcal{R}_3 \quad (4b)$$

— вектор, зависящий от  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Вопрос о том, можно ли использовать какую-либо из линейных моделей (4) вместо нелинейной (3) и как именно выбрать коэффициенты линеаризации  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  в некотором смысле оптимально, может быть решен с помощью критерия максимальной надежности (см. [3]) интерпретации данных измерения. А именно: одновременно с решением основной задачи можно по указанному в [3] способу определить величину, называемую надежностью используемой модели, которая представляет собой вероятность ошибочно отвергнуть гипотезу о правомерности представления результатов измерения в виде (4). Далее, находя модель, для которой надежность максимальна, получим линейную схему регистрации изображения, использование которой менее всего противоречит результатам измерения. Заметим, что при формальной линеаризации схемы (3) относительно первых производных  $z_x$  и  $z_y$  получим схему вида (4), для которой  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ .

Пусть первое изображение из исходного набора получено, когда объектив ОС был расположен в точке  $(q_1, q_2, q_3)$ , а второе — при координатах объектива  $(q_1 + \varepsilon_2, q_2 + \mu_2, q_3)$ . Как видно из соотношений (2), изображение точки поверхности с координатами  $(x, y, z)$  попадет в экранную ячейку с координатами: на первом изображении —  $\omega_1 = \Delta \cdot i_1 = M(x - q_1)$ ,  $\omega_2 = \Delta \cdot j_1 = M(y - q_2)$ ; на втором —  $\tilde{\omega}_1 = \Delta \cdot i_2 = M(x - q_1 - \varepsilon_2)$ ,  $\tilde{\omega}_2 = \Delta \cdot j_2 = M(y - q_2 - \mu_2)$ . Таким образом, индексы, характеризующие положение экранной ячейки, соответствующей одному и тому же участку поверхности на разных изображениях, могут быть найдены в явном виде в зависимости от координат объектива ОС, при

которых было получено данное изображение. Действительно, на первом изображении

$$i_1 = \frac{M}{\Delta} (x - q_1), \quad j_1 = \frac{M}{\Delta} (y - q_2),$$

на втором изображении

$$i_2 = \frac{M}{\Delta} (x - q_1 - \varepsilon_2), \quad j_2 = \frac{M}{\Delta} (y - q_2 - \mu_2). \quad (5)$$

Разобьем поверхность  $z = z(x, y)$  на криволинейные клетки в соответствии с сеткой, формально связанной с положением объектива для первого изображения:  $x_i = (\Delta/M)i + q_1$ ,  $y_j = (\Delta/M)j + q_2$ ,  $i = i_1$ ,  $j = j_1$ . Тогда клетка с координатами  $(x_i, y_j, z_{ij})$ ,  $z_{ij} = z(x_i, y_j)$  на первом изображении отобразится на ячейку с индексами  $(i_1, j_1)$ , на втором изображении — на ячейку с индексами  $(i_2, j_2)$  (см. (5)) и так далее для любого изображения исходного набора.

Если исходный набор состоит из трех изображений, то для каждой клетки с координатами  $(x_i, y_j, z_{ij})$  — каждого сигнала  $\mathbf{f}$  из (4а) можно записать следующую систему:

$$\begin{aligned} I_{i_1 j_1} &= (C_{i_1 j_1}, \mathbf{f}) + v_{i_1 j_1} - 1\text{-е изображение,} \\ I_{i_2 j_2} &= (C_{i_2 j_2}, \mathbf{f}) + v_{i_2 j_2} - 2\text{-е изображение,} \\ I_{i_3 j_3} &= (C_{i_3 j_3}, \mathbf{f}) + v_{i_3 j_3} - 3\text{-е изображение,} \end{aligned} \quad (6)$$

где коэффициенты  $C_{i_k j_k}$  выражаются формулой (4б), в которой индексы  $i, j$  должны быть заменены на индексы  $i_k, j_k$ , вычисленные в зависимости от положений объектива по формулам (5).

Перепишем (6) в операторном виде:

$$\xi = A\mathbf{f} + \mathbf{v}, \quad (6a)$$

где  $\mathbf{f}$  — входной сигнал (см. (4а)),  $\xi = (I_{i_1 j_1}, I_{i_2 j_2}, I_{i_3 j_3})^*$ ,  $\mathbf{v} = (v_{i_1 j_1}, v_{i_2 j_2}, v_{i_3 j_3})^*$ , здесь  $\xi$  — вектор выходных сигналов от экранных ячеек, на которые падает свет с одного и того же участка поверхности,  $\mathbf{v}$  — вектор шумов с нулевым математическим ожиданием и ковариационным оператором  $\Sigma = \sigma^2 I$ , где  $I$  — единичный оператор:  $I \in (\mathcal{R}_3 \rightarrow \mathcal{R}_3)$ . Индексы  $i_k, j_k$  в формуле (6) зависят от номера изображения в исходном наборе, т. е. в конечном счете от положений объектива, и могут быть найдены в явном виде, если известна приблизительная высота объектива над поверхностью.

**Постановка задач редукции.** Для восстановления формы поверхности следует сначала построить вектор, который служил бы наилучшим приближением вектора  $\eta = U\mathbf{f} = \mathbf{f}$  (выражающегося через компоненты нормали к поверхности), а в задаче синтеза изображений подобный вектор должен служить оценкой для  $\eta = U\mathbf{f} = (I_{i_1 j_1}, I_{i_2 j_2}, I_{i_3 j_3})^*$ , компонентами которого являлись бы значения выходных сигналов экранных ячеек в 4, 5, 6-м изображениях, образующих синтезированный набор. Таким образом, к обоим этим задачам возможен единый подход, только для первой задачи следует положить  $U$  равным  $I$  — единичному оператору, а для второй  $U$  — известный оператор, аналогичный оператору  $A$  в (6а), но зависящий от других, «виртуальных», положений объектива.

При постановке задач полезно учесть априорную информацию об объекте, что не может ухудшить решение поставленных задач (см.

[4]), конечно при условии, что она на самом деле соответствует действительности. Заключается эта информация в следующих дополнительных предположениях о свойствах поверхности. Будем считать, что величины  $z_x, z_y, A(x, y)$  — случайны, независимы в совокупности и их математические ожидания равны соответственно  $Ez_x = Ez_y = 0, EA(x, y) = a$ , а дисперсии —  $Dz_x = Dz_y = \sigma_1^2, DA(x, y) = \sigma_2^2$ . Следовательно, можно оценить математическое ожидание сигнала  $E\hat{f} = f_0$  и его ковариационный оператор  $F: (Fx, y) = E(\hat{f} - f_0, x)(\hat{f} - f_0, y)$ . Теперь обе задачи формулируются в рамках модели  $[A, F, f_0, \Sigma]$  по терминологии работы [4].

Представим вектор  $\eta = -Uf_0 = U\hat{f} - Uf_0$  в виде  $U(\hat{f} - f_0) = R(\xi - Af_0) - [R(\xi - Af_0) - U(\hat{f} - f_0)]$ , где  $R \in (\mathcal{R}_3 \rightarrow \mathcal{R}_3)$  — некоторый линейный оператор, который можно выбрать из условия минимизации среднеквадратичной ошибки интерпретации  $R(\xi - Af_0)$  как  $U(\hat{f} - f_0)$ :

Представим вектор  $\eta = -Uf_0 = U\hat{f} - Uf_0$  в виде  $U(\hat{f} - f_0) = R(\xi - Af_0) - [R(\xi - Af_0) - U(\hat{f} - f_0)]$ , где  $R \in (\mathcal{R}_3 \rightarrow \mathcal{R}_3)$  — некоторый линейный оператор, который можно выбрать из условия минимизации среднеквадратичной ошибки интерпретации  $R(\xi - Af_0)$  как  $U(\hat{f} - f_0)$ :

$$\inf \{E \|R'(\xi - Af_0) - U(\hat{f} - f_0)\|^2 | R' \in (\mathcal{R}_3 \rightarrow \mathcal{R}_3)\} = \|R(\xi - Af_0) - U(\hat{f} - f_0)\|^2 \equiv h(U). \quad (7)$$

Таким образом, искомым вектор —  $\eta = R(\xi - Af_0) + Uf_0$ , где  $R$  — оператор, представляющий собой решение задачи на минимум (7). Как показано в [4], если матрица  $S = AFA^* + \Sigma$  невырождена, то решение (7) существует, единственно и выражается следующей формулой:

$$R = UFA^*(AFA^* + \Sigma)^{-1}, \quad \eta = Uf = R(\xi - Af_0) + Uf_0. \quad (8)$$

Невырожденность  $S$  следует из положительной определенности ковариационных операторов  $\Sigma$  и  $F$  и неотрицательности  $AFA^*$ . Заметим, что при некоторых стратегиях измерений построенный алгоритм неприменим. А именно: если все изображения исходного набора получены при положениях объектива ОС, лежащих в одной и той же вертикальной плоскости, то матрица  $AFA^*$  вырождена, что свидетельствует о

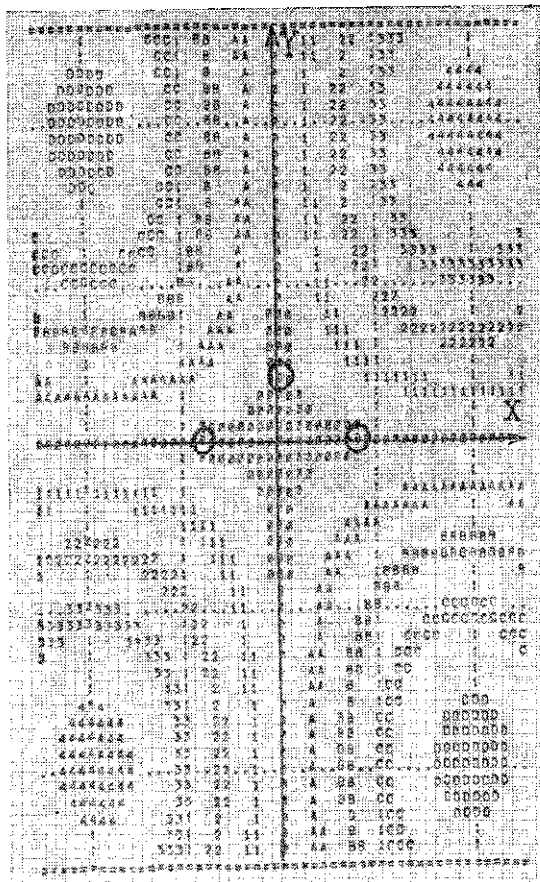


Рис. 2. Карта использованного фрагмента поверхности. Линии уровня функции  $z(x, y)$  проведены через каждые 5 м по высоте. Символы  $A, B, C, D$  соответствуют отрицательным значениям функции  $z(x, y)$ , а символы 1, 2, 3, 4 — положительным. Размер фрагмента по  $x$  и  $y$  —  $102 \times 102$  м

недостаточности информации, заключенной в измерениях для решения поставленных задач.

Формулы (8) сразу дают решение задачи синтеза изображений. Для решения первой задачи (восстановления формы) отметим следующее. При редукции измерения  $\xi$  с оператором  $A$  к вектору  $\eta = Uf = f(U=I)$  с минимально возможной погрешностью восстановлен сигнал  $f$ , т. е. в конечном счете вычислены значения функций  $z_x(x, y)$ ,  $z_y(x, y)$ ,  $A(x, y)$  в узлах известной сетки по переменным  $x$  и  $y$ . Решим систему уравнений в частных производных первого порядка с начальным условием (известным априори):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= V_1(x, y), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= V_2(x, y), \\ z(x_0, y_0) &= z_0, \end{aligned} \quad (9)$$

где функции  $V_1(x, y)$  и  $V_2(x, y)$  известны в узлах сетки. При выполнении условия согласованности  $\partial V_1/\partial y \equiv \partial V_2/\partial x$  решение задачи (9) существует, единственно и выражается формулой [5]:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \int_{x_0}^x V_1(\lambda, y) d\lambda + \\ &+ \int_{y_0}^y V_2(x_0, \mu) d\mu + z_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Аппроксимируя интегралы в (10) конечными суммами с пятым порядком по выбранной сетке [6], получим законченный алгоритм восстановления формы поверхности по набору ее видеоизображений.

**Численный эксперимент.** Изображения исходного набора генерировались на ЭВМ в соответствии с нелинейной формулой (3). Поверхность (рис. 2) была задана функцией  $z = 20 \sin(kx) \cdot \sin(ky)$  (в метрах) при высоте положения объектива ОС  $H = 1000$  м. Изображение представляло собой массив  $51 \times 51$  точек.

Надежность линеаризованной модели вычислялась по формуле

$$\alpha_A(\xi) = \int_0^{z(\xi)} P_{x^*}(x) dx,$$

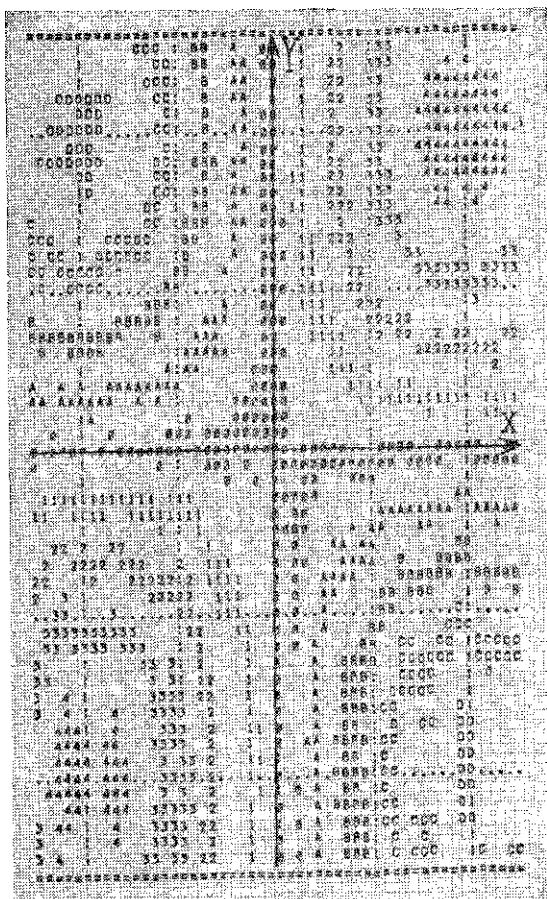


Рис. 3. Карта восстановленной поверхности. Отношение сигнал/шум  $2,5 \cdot 10^6$  по энергии. Максимальная погрешность восстановления — 2,75 м

где  $t(\xi) = S^{-1/2}(\xi - Af_0)$ ,  $P_{\chi^2}(x)$  — плотность  $\chi_n^2$  распределения с  $n = \dim(\tilde{\mathcal{R}})$  степенями свободы. Данная формула соответствует методике, предложенной в [3] при некоторых дополнительных предположениях. Так как для формально линеаризованной модели ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ ) надежность составила около 0,6, то дальнейшая коррекция параметров модели по надежности не проводилась.

При восстановлении формы поверхности (рис. 3) было установлено, что для отношения сигнал/шум, равного  $2,5 \cdot 10^6$  по энергии, абсолютная погрешность восстановления формы составила 2,75 м, а относительная погрешность восстановления яркости — 12%. В то же время при отношении сигнал/шум порядка  $10^8$  форма поверхности была восстановлена с точностью до 20 см, а относительная погрешность восстановления яркости не превысила 3%.

Для контроля за точностью работы второго алгоритма был генерирован тестовый набор по формулам (3) с нулевым шумом при тех же положениях объектива, что и в синтезируемом наборе. После парного сравнения соответствующих изображений тестового и синтезированного наборов было установлено, что относительная погрешность при отношении сигнал/шум, равном  $10^6$ , составляет приблизительно 8%.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Русинов М. М. Техническая оптика. Л., 1979. [2] Кирейтов В. Р. Обратные задачи фотометрии. Новосибирск, 1983. [3] Пытьев Ю. П. // ДАН СССР. 1987. 295, № 3. С. 542. [4] Пытьев Ю. П. // Матем. сб. 1983. 120(162), № 2. С. 240. [5] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., 1959. [6] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., 1966. Т. 1.

Поступила в редакцию  
08.02.88

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 3

## ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 535.417

### КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОКРЫТИЙ НА МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПОДЛОЖКЕ

С. В. Гребенщиков, Н. В. Гришина, М. Ф. Малхозов

(кафедра математики)

Представлены результаты численного исследования коэффициента отражения металлических зеркал с диэлектрическими покрытиями, содержащими тонкие металлические слои.

В многослойном оптическом покрытии, выполненном из материалов с низкой температурой разложения, напыленные пленки могут содержать помимо молекул исходных материалов и некоторое количество составляющих их элементов. Практика показывает, что в материалах покрытий чаще всего присутствует избыточное количество металлических компонент исходных веществ. Металлические примеси могут попадать в диэлектрическое покрытие и в результате диффузии из подложки. В процессе старения материала покрытия примесные атомы могут мигрировать к границам зерен, поверхностям раздела сред и