КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 621.372.81

РАСЧЕТ ГРАДИЕНТНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКОН КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭФФЕКТИВНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

А. Н. Боголюбов, А. Г. Свешников, В. В. Лопушенко

(кафедра математики)

Предложен экономичный конечно-разностный алгоритм расчета градиентных оптических волокон с произвольной формой профиля показателя преломления.

В настоящее время ведутся интенсивные исследования в области систем волоконнооптической связи, основным элементом которых являются оптические волокна (ОВ). Помимо систем связи ОВ все шире начинают применяться во многих технических устройствах и приборах, обладающих высокими эксплуатационными характеристиками [1]. Поэтому теоретическое исследование ОВ имеет важное практическое значение. Одним из универсальных численных методов является метод конечных разностей (КР), позволяющий рассчитывать градиентные ОВ с произвольной формой профиля показателя преломления. При этом используется вариационная постановка задачи, приводящая к появлению не имеющих физического смысла фиктивных решений, борьба с которыми сильно снижает экономичность алгоритмов [2]. Гораздо реже используется метод КР для прямого решения задачи Штурма—Лиувилля, получаемой непосредственно из уравнений Максвелла. В этом случае фиктивных решений нет, что является значительным преимуществом такого алгоритма. Правда, в отличие от метода КР в вариационной постановке КР матрицы получаются уже несимметричными, что несколько усложняет их математическую обработку, однако сильная разреженность КР матриц позволяет создать экономичный алгоритм, причем крайне важным моментом является постановка эффективных граничных условий.

Рассмотрим круглое ОВ, показатель преломления которого зависит только от радиуса $n(r)=\sqrt{\varepsilon(r)}$, где $\varepsilon(r)$ — диэлектрическая проницаемость. Обозначим радиус сердцевины ОВ через a. Введем цилиндрическую систему координат, ось которой направим по оси OB. Тогда, рассматривая решения вида $A(r)\,e^{i(\beta z-\omega t)}e^{i\nu\varphi}$, где β — постоянная распространения, для поперечных электрических компонент E_r и E_φ можно получить систему уравнений

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_r}{dr}\right)+\left(\varepsilon(r)k^2-\beta^2-\frac{\nu^2+1}{r^2}\right)E_r+\frac{d}{dr}\left(E_r\frac{d\ln\varepsilon(r)}{dr}\right)=\frac{2i\nu}{r^2}E_\varphi,$$
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_\varphi}{dr}\right)+\left(\varepsilon(r)k^2-\beta^2-\frac{\nu^2+1}{r^2}\right)E_\varphi=-\frac{2i\nu}{r^2}E_r-\frac{i\nu}{r}\frac{d\ln\varepsilon(r)}{dr}E_r, \tag{1}$$

где $k=\omega/c$ — волновое число. Требуя ограниченности поля на оси OB, получаем граничное условие при $r=0$:

$$|E_r|<\infty,\qquad |E_\varphi|<\infty,\qquad r=0. \tag{2}$$

В качестве второго граничного условия обычно берут условие обращения в нуль поля на некотором расстоянии R от оси OB и система (1) решается на отрезке $0\leqslant r\leqslant R$, где $R>a$. При этом вблизи отсечки, когда поле выходит далеко за пределы сердцевины OB, величину R приходится значительно увеличивать ($R\gg a$). Следовательно, область, в которой ищется решение системы (1), сильно расширяется, и при использовании метода КР получаются КР матрицы очень высокого порядка. Отметим также, что не существует экономичного критерия выбора величины R, которую приходится подбирать экспериментально. Гораздо удобнее использовать при $r=a$ эффективные граничные условия и тем самым решать задачу на отрезке $0\leqslant r\leqslant$

$\leqslant a$. Пусть оболочка градиентного ОВ является бесконечной и характеризуется постоянным показателем преломления $n_2=\sqrt{\varepsilon_2}$. Тогда решение системы (1) в оболочке находится аналитически и содержит две константы. Записывая условия непрерывности тангенциальных составляющих на границе сердцевина — оболочка, получим четыре уравнения, содержащих две константы. Исключая эти константы, приходим к граничным условиям при $r=a$:

$$\frac{dE_r}{dr}+\left(\frac{1}{r}+\frac{d\ln\varepsilon(r)}{dr}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{C}{C^2-D^2}\right)E_r+i\left(\frac{\nu}{r}-\frac{D}{C^2-D^2}\right)E_\varphi=0,$$

$$\frac{dE_\varphi}{dr}+\left(\frac{1}{r}+\frac{C}{C^2-D^2}\right)E_\varphi-i\left(\frac{\nu}{r}-\frac{D}{C^2-D^2}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)E_r=0,\quad r=a, \tag{3}$$

где

$$\varepsilon_1=\lim_{r\to a-0}\varepsilon(r),\quad \left.\frac{d\ln\varepsilon(r)}{dr}\right|_{r=a}=\lim_{r\to a-0}\frac{d\ln\varepsilon(r)}{dr},$$

$$\varkappa^2=\beta^2-\varepsilon_2k^2,\ C=\frac{\nu}{a\varkappa^2}+\frac{1}{\varkappa}\frac{K_{\nu-1}(\varkappa a)}{K_\nu(\varkappa a)},\quad D=\frac{\nu}{a\varkappa^2}.$$

$K_\nu(x)$ — функция Макдональда.

Задача (1)—(3) представляет собой задачу Штурма—Лиувилля, причем собственным значением является квадрат постоянной распространения β^2. Спецификой задачи (1)—(3) является то, что собственное значение входит в граничные условия, причем нелинейным образом.

Для решения задачи (1)—(3) с помощью метода интегральных тождеств (см. [3]) строится КР-схема, аппроксимирующая задачу (1)—(3) с порядком $O(h^2)$, где h — шаг сетки. В результате получаем задачу на собственные значения вида

$$A(\beta^2)\mathbf{Y}=\beta^2\mathbf{Y}, \tag{4}$$

где $\mathbf{Y}=(E_r, E_\varphi)^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец (Т — знак транспонирования), $A(\beta^2)$ — блочно-трехдиагональная матрица, состоящая из квадратных блок-матриц второго порядка A_{ij} ($i, j=1, 2, \ldots, N$), N — число узлов разностной сетки, причем элементы блок-матрицы A_{NN} зависят от β^2, а элементы остальных блок-матриц не зависят. Определитель матрицы $A(\beta^2)-\beta^2\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, легко найти, используя ме-

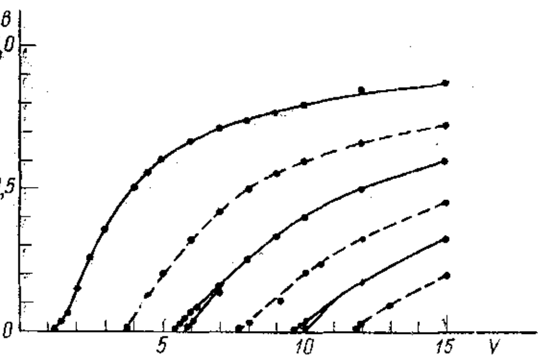

Рис. 1

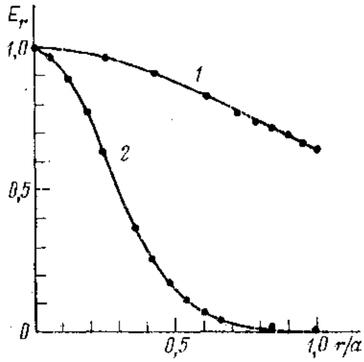

Рис. 2

Рис. 1. Дисперсионные характеристики градиентного ОВ, $V=ka\sqrt{n_1^2-n_2^2}$ — нормированная частота, $b=\dfrac{(\beta/k)^2-n_2^2}{n_1^2-n_2^2}$ — нормированная постоянная распространения: $\nu=0$ (сплошные линии) и 1 (пунктир)

Рис. 2. Зависимость компоненты E_r для основной HE_{11} — моды градиентного ОВ от нормированного радиуса: $V=1,5$ (1) и 15 (2) тод исключения Гаусса для блочных матриц [4]. При этом, поскольку получаемая в результате треугольная матрица является треугольным разложением исходной матрицы, процесс вычисления собственных векторов **Y** (т. е. электрических компонент поля E_r и E_φ) чрезвычайно упрощается.

В качестве примера приведем расчет градиентного *ОВ*, профиль показателя преломления которого имеет вид

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2\left(1-2\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2\right), & r<a, \\ n_2^2, & r \geqslant a, \end{cases}$$

где $n_1=1{,}46$, $n_2=1{,}45$, $\Delta=(n_1^2-n_2^2)/(2n_1^2)$. На рис. 1 представлены дисперсионные характеристики, а на рис. 2 — зависимость компоненты E_r для основной HE_{11}-моды от нормированного радиуса r/a. Время расчета одной моды на ЭВМ ЕС-1045 ~ 1 с, точность — не менее четырех верных знаков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Красюк Б. А., Корнеев Г. И. Оптические системы связи и световодные датчики. Вопросы технологии. М., 1985. [2] Ikeuchi M., Sawami H.//IEEE Micr. Theory Techn. 1981. **MTT-29**, N 3. P. 234. [3] Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М., 1976. [4] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.

Поступила в редакцию
12.10.88

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 3

УДК 539.1.01

К КОСМОЛОГИЧЕСКИМ РЕШЕНИЯМ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

А. А. Власов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Получены новые решения уравнений релятивистской теории гравитации, отвечающие модели Вселенной, однородной и изотропной в эффективном искривленном пространстве, но не в пространстве Минковского.

В работе [1] в релятивистской теории гравитации (РТГ) рассматривались модели фридмановой Вселенной, однородной и изотропной как в эффективном искривленном пространстве с метрикой g_{ij}, так и в пространстве Минковского, базовом пространстве для РТГ, с метрикой γ_{ij}. Для этих моделей, а также с учетом того факта, что в РТГ имеют смысл только те движения вещества, которые описываются одной картой в пространстве Минковского (см., напр. [2]), было показано, что в РТГ из трех возможных типов фридмановой Вселенной реализуется только так называемая «плоская» модель (напомним, что полная система уравнений РТГ включает кроме уравнений Гильберта—Эйнштейна еще и ковариантное уравнение, связывающее g_{ij} и γ_{ij}:

$$D_j\left(\sqrt{-g}\,g^{ij}\right)=0,$$

где D_j — ковариантная по γ_{ij} производная; это уравнение в РТГ существенно для описания гравитационной физики и не имеет ничего общего с традиционной «калибровкой», от наложения которой физика, по определению, не зависит). Данный результат, однако, не исключает существования в РТГ других, отличных от разобранных в [1], решений. Действительно, приведем решения уравнений РТГ, которые отвечают однородной и изотропной модели Вселенной с традиционным интервалом Робертсона—Уокера

$$ds^2=d\tau^2-R^2(\tau)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2\,d\omega^2\right], \tag{1}$$