УДК 519.95

О НАДЕЖНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЙ

И. В. Митин, А. И. Чуличков

(кафедра общей физики для физического факультета; кафедра физики атмосферы и математической геофизики)

Исследована роль модельных представлений для интерпретации результатов эксперимента. Поставлена задача уточнения параметров модели на основании понятия надежности модели. Получены соотношения для вычисления локальной надежности при фиксированных значениях параметров модели.

1. Создание математической модели эксперимента является одним из основных этапов анализа и интерпретации данных. В состав модели, кроме результатов эксперимента, обычно включаются данные как об используемых в эксперименте приборах (например, аппаратная функция и т. п.), так и об условиях проведения эксперимента (например, характер шума, систематические ошибки и т. п.). Однако для целого класса задач, в частности для так называемых некорректных обратных задач, даже точное знание модели часто не позволяет получить приемлемые результаты. В этом случае в модель должны быть включены и априорные сведения о характеристиках изучаемого процесса.

Рассмотрим эксперименты, схема которых представима в виде

$$\xi = Af + \nu \in \mathcal{R}^{(N)}, \tag{1}$$

где A — модель линейного измерительного прибора; ν — шум в эксперименте, моделью которого является нормальное распределение $\mathcal{N}(0, \Sigma)$; ξ — результат измерения неизвестного сигнала f. Задача состоит в получении оптимальной оценки для f на основании измерений ξ и модельных представлений. Такая задача подробно рассмотрена в [1], где получены решения для различных моделей, включая модели с априорной информацией.

Однако на практике модельные представления об условиях проведения эксперимента и особенно априорная информация имеют зачастую весьма приблизительный, а иногда и ошибочный характер, поэтому применение такой модели может привести к результату, не соответствующему истинному. В связи с этим особую актуальность приобретает задача выработки критериев, позволяющих проверить состоятельность модели, т. е. ее соответствие результатам эксперимента.

В качестве такого критерия для модели $[A, \Sigma]$ в схеме эксперимента (1) в [2] предложено понятие надежности модели, основанное на теории статистической проверки гипотез. В настоящей работе предложены методы вычисления надежности модели с априорной информацией о сигнале f, основанные на предположении о том, что f — случайный элемент с нормальным распределением $\mathcal{N}(f_0, F)$, при этом рассматривается случай параметрического задания модели $[A(\theta), F(\theta), f_0(\theta), \Sigma(\theta)]$, где $\theta \in \mathcal{R}^{(k)}$ $(k<N)$ — параметр задачи. Введение понятия надежности модели по параметру основано на факте, что в случае независимости случайных величин f и ν случайная величина ξ имеет распределение $\mathcal{N}(Af_0(AFA^*+\Sigma)$ с первыми двумя моментами, зависящими от θ.

2. Пусть гипотеза H (альтернатива K) состоит в том, что случайная величина ξ имеет распределение $p_H(x)$ $(p_K(x))$. Тогда критическая функция $\varphi^{\alpha}_{H,K}(x)$ наиболее мощного критерия, уровень которого не превосходит α, определяется из соотношения [3]

$$\varphi^{\alpha}_{H,K}=\begin{cases}1, & p_K(x)>kp_H(x),\\ 0, & p_K(x)<kp_H(x),\end{cases}$$

где k находится из условия $E_H\varphi(x)=\alpha$; E_H — знак математического ожидания, вычисленного по распределению $p_H(x)$.

Надежностью гипотезы H при альтернативе K называется случайная величина [2]

$$\alpha_{H,K}(\xi)=\inf\{\alpha\,|\,\varphi^{\alpha}_{H,K}(\xi)=1\},$$

равная минимальной вероятности ошибочно отвергнуть гипотезу H на основании измерения ξ и вычисляемая по формуле

$$\alpha_{H,K}(\xi)=\int\limits_{l(x)>l(\xi)} p_H(x)\,dx,$$

где $l(\cdot)=p_K(\cdot)/p_H(\cdot)$ — отношение правдоподобий.

Если же гипотеза H (альтернатива K) представляет собой некоторое семейство $\{H\}(\{K\})$, то надежность модели может быть определена только в случае

$$\alpha_{\{H\},\{K\}}(\xi)=\underline{\alpha}(\xi)=\overline{\alpha}(\xi),$$

где

$$\underline{\alpha}(\xi)=\sup_{\{H\}}\inf_{\{K\}}\alpha_{H,K}(\xi);\quad \overline{\alpha}(\xi)=\inf_{\{K\}}\sup_{\{H\}}\alpha_{H,K}(\xi).$$

3. Рассмотрим случай параметрического задания семейства гипотез и альтернатив. Пусть случайная величина ξ имеет распределение $p(x,\theta)$, где число θ является параметром. Пусть гипотеза H состоит в том, что параметр $\theta=\theta_0$, $H:\theta=\theta_0$, в качестве альтернативы рассматриваются значения θ, лежащие в некоторой окрестности точки θ_0, т. е. $\{K\}:\theta\in\mathscr{D}(\theta_0)$, $\mathscr{D}(\theta_0)=\{0<\rho(\theta-\theta_0)<\Delta\}$, где $\rho(\theta-\theta_0)=|\theta-\theta_0|$ — расстояние между θ и θ_0. Считая плотность $p(x,\theta)$ дифференцируемой по θ в окрестности точки θ_0 и производную по θ непрерывной в θ_0, запишем

$$p(x,\theta)=p(x,\theta_0)+\left.\frac{dp(x,\theta)}{d\theta}\right|_{\theta_0}\Delta\theta+o(\Delta\theta),$$

тогда отношение правдоподобий

$$l(x)=1+\left.\frac{d\ln p(x,\theta)}{d\theta}\right|_{\theta_0}\Delta\theta+o(\Delta\theta) \qquad (2)$$

и выражение для надежности $\alpha(\xi)$ гипотезы $H:\theta=\theta_0$ против альтернативы $\{K\}:\theta\in\mathscr{D}(\theta_0)$ примет вид

$$\alpha(\xi)=\inf_{\{K\}}\alpha_{H,K}(\xi)=\inf_{\Delta\theta}P_{\theta_0}(x:\tau(x,\theta_0)\,\Delta\theta>\tau(\xi,\theta_0)\,\Delta\theta+o(\Delta\theta)),$$

$$\tau(x,\theta_0)=\left.\frac{d\ln p(x,\theta)}{d\theta}\right|_{\theta_0}. \qquad (3)$$

Если $\tau(z, \theta_0)$ непрерывна по z в точке $\theta=\theta_0$, а случайная величина x абсолютно непрерывна, то $\alpha(\xi)$ при малых $\Delta\theta$ может быть приближенно вычислена по формуле

$$\alpha(\xi)=\inf_{\Delta\theta} P_{\theta_0}(x: \tau(x, \theta_0)\Delta\theta > \tau(\xi, \theta_0)\Delta\theta).$$

Случайную величину $\tilde{\alpha}(\xi)=\lim_{\Delta\theta\to 0}\alpha(\xi)$ назовем локальной надежностью гипотезы H против сложной альтернативы $\{K\}$.

Рассмотрим случай нормального N-мерного распределения $p(x, \theta)=\mathcal{N}(x_0(\theta), S(\theta))$. Выберем базис пространства $\mathcal{R}^{(N)}$, составленный из собственных векторов корреляционного оператора $S(\theta)$, и будем для простоты считать, что изменение параметра θ влияет только на величину собственных значений $\sigma_i^2(\theta)$ оператора $S(\theta)$, но не на его собственные векторы. Тогда случайная величина

$$\tau(x, \theta_0)=\sum_{i=1}^{N}\{c_i(z_i-1)+b_i y_i\}=\sum_{i=1}^{N}\varkappa_i, \tag{4}$$

$$y_i=\frac{x_i-x_{0i}}{\sigma_i};\ z_i=y_i^2;\ c_i=\frac{1}{2\sigma_i^2}\frac{d\sigma_i^2}{d\theta}\bigg|_{\theta_0};\ b_i=\frac{1}{\sigma_i}\frac{dx_{0i}}{d\theta}\bigg|_{\theta_0},$$

$$i=1,2,\dots, N.$$

В силу независимости и нормальности случайных величин $y_i\sim\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины $\varkappa_i$ также независимы и имеют математическое ожидание $E\varkappa_i=0$ и дисперсию $E\varkappa_i^2=2c_i^2+b_i^2$. В частности, если

$$\frac{d\sigma_i^2}{d\theta}\bigg|_{\theta_0}=0,\ i=1, 2, \dots, N,\ \text{то}\ \tau(x, \theta)\sim\mathcal{N}\left(0, \sum_{i=1}^{N} b_i^2\right),$$

и, согласно (3), надежность

$$\tilde{\alpha}(\xi)=\Phi\left(\frac{|\sum_{i=1}^{N} b_i\eta_i|}{(\sum_{i=1}^{N} b_i^2)^{1/2}}\right),\quad \eta_i=\frac{\xi_i-x_{0i}}{\sigma_i},\ \Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt.$$

Рассмотрим последовательность случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, \dots$ с увеличивающейся размерностью и найдем предельное значение локальной надежности $\tilde{\alpha}(\xi_N)$ при $N\to\infty$. Обозначим

$$t_N=\sum_{i=1}^{N}\frac{\varkappa_{i,N}}{\sqrt{\mathcal{D}_N}},\ \mathcal{D}_N=\sum_{i=1}^{N}(2c_{i,N}^2+b_{i,N}^2),$$

тогда $Et_N=0$, $Et^2_N=1$, и если выполнено условие Линдеберга [4]

$$\sum_{i=1}^{N} E(\varkappa_{i,N}^2|\ |\varkappa_{i,N}|<a)\xrightarrow[N\to\infty]{}0,$$

то последовательность $\{t_N\}$ сходится по распределению к $\mathcal{N}(0, 1)$. Обозначим z_∞ предел последовательности, тогда $\tilde{\alpha}(\xi)\xrightarrow[N\to\infty]{}\Phi(z_\infty)$. Значение

$\Phi\left(\frac{\tau_N(\xi, \theta_0)}{\sqrt{\mathscr{D}_N}}\right)$ можно использовать для приближенного вычисления локальной надежности при больших значениях N.

Заметим, что если точка θ_0 выбрана так, что $\left.\frac{d \ln p(x, \theta)}{d\theta}\right|_{\theta_0}=0$ (например, из принципа максимального правдоподобия), то надежность $\tilde{\alpha}(\xi)$ в этой точке принимает свое максимальное значение $\tilde{\alpha}(\xi)=0{,}5$. Таким образом, оценка максимального правдоподобия параметров распределения обладает наибольшей локальной надежностью при проверке гипотезы $H:\theta=\theta_0$ против альтернатив $\{K\}:\theta\in\mathscr{D}(\theta_0)$.

4. Рассмотрим теперь случай, когда параметр θ является k-мерным вектором евклидова пространства $\mathscr{R}^{(k)}$; считая плотность $p(x, \theta)$ дифференцируемой в окрестности точки θ_0, а ее частные производные непрерывными в точке θ_0 и применяя разложение по формуле Тейлора

$$p(x, \theta)=p(x, \theta_0)+\sum_{j=1}^{k}\left.\frac{\partial p(x, \theta)}{\partial\theta_j}\right|_{\theta_0}\Delta\theta_j+o(\Delta\theta),\ \theta=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)\in\mathscr{R}^{(k)},$$

рассмотрим гипотезу $H:\Delta\theta=0$ против альтернативы $\{K\}:\Delta\theta\in\mathscr{D}(0, \Delta)$, где $\mathscr{D}(0, \Delta)$ — k-мерный шар с центром в точке 0 и радиусом Δ. Аналогично (2) получим для отношения правдоподобий

$$l(x)=1+\sum_{j=1}^{k}\tau_j(x, \theta_0)\Delta\theta_j=1+T(x, \theta_0, \Delta\theta),$$

а выражение (3) для локальной надежности примет вид

$$\alpha(\xi)=\inf_{\Delta\theta}P_{\theta_0}\left(x:\sum_{j=1}^{k}\tau_j(x, \theta_0)\Delta\theta_j>\sum_{j=1}^{k}\tau_j(\xi, \theta_0)\Delta\theta_j\right). \tag{5}$$

Вероятности в (5) зависят только от направления вектора $\Delta\theta$. Действительно, деля обе части неравенства в (5) на $\|\Delta\theta\|$, мы не изменяем его, и, значит, для нахождения локальной надежности необходимо найти лишь направление, которое доставляет решение задачи на минимум.

Обратимся, как и в предыдущем случае, к N-мерному нормальному распределению $p(x, \theta)=\mathscr{N}(x_0(\theta), S(\theta))$ и для простоты будем считать, что собственные векторы оператора $S(\theta)$ не зависят от θ. Тогда в базисе собственных векторов случайная величина

$$T(x, \theta_0, \Delta\theta)=((z-\overline{1}), C\Delta\theta)+(y, B\Delta\theta), \tag{6}$$

$$c_{ij}=\frac{1}{2\sigma_i^2}\left.\frac{\partial\sigma_i^2}{\partial\theta_j}\right|_{\theta_0};\ b_{ij}=\frac{1}{\sigma_i}\left.\frac{\partial x_{0i}}{\partial\theta_j}\right|_{\theta_0}\ (i=1, 2, \ldots, N;\ j=1, 2, \ldots, k),$$

$$z=(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_N^2),\ \overline{1}=(1, 1, \ldots, 1).$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда либо x_0, либо S не зависят от параметров.

а) Пусть $c_{ij}=0$, или $\left.\frac{\partial\sigma_i^2}{\partial\theta_j}\right|_{\theta_0}=0$ $(i=1, 2, \ldots, N;\ j=1, 2, \ldots, k)$.

В этом случае случайная величина (6) $T(x, \theta_0, \Delta\theta)=(y, B\Delta\theta)$ имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(0, \|B\Delta\theta\|^2)$. Поэтому минимум надежности (5) будет соответствовать такому направлению $\Delta\theta^{(\alpha)}$, при котором величина $\dfrac{(\eta, B\Delta\theta)}{\|B\Delta\theta\|}$ будет максимальной, т. е.

$$\alpha(\xi)=\Phi\left(\sup_{\Delta\theta}\frac{(\eta, B\Delta\theta)}{\|B\Delta\theta\|}\right). \tag{7}$$

Если $\left.\dfrac{\partial \ln p(\xi, \theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta_0}=0$ $(j=1, 2, \ldots, k)$, то $B^*\eta=0$, следовательно, локальная надежность $\alpha(\xi)$ будет максимальной и равной 0,5 независимо от направления $\Delta\theta$. Если же это условие не выполняется хотя бы для одного параметра, то задача (5) аналогична задаче $\inf\limits_{\Delta\theta}\{\|\eta-$ $-B\Delta\theta\|^2 \mid \|B\Delta\theta\|^2=1\}$, решение которой

$$\Delta\theta^{(\alpha)}=\frac{B^-\eta+(I-B^-B)\,x}{\|BB^-\eta\|}, \tag{8}$$

где x — любой вектор из $\mathcal{R}^{(k)}$,

$$\alpha(\xi)=\Phi(\|BB^-\eta\|). \tag{9}$$

Из (8)—(9) следует, что минимальная надежность будет соответствовать случаю $BB^-\eta=\eta$ и $\alpha(\xi)=\Phi(\|\eta\|)$.

б) Пусть $b_{ij}=0$, или $\left.\dfrac{\partial x_{0i}}{\partial\theta_j}\right|_{\theta_0}=0$ $(i=1, 2, \ldots, N;\ j=1, 2, \ldots, k)$.

Найдем предельное значение локальной надежности при $N\to\infty$. Обозначим $t_N=\dfrac{T_N(x, \theta_0, \Delta\theta)}{\sqrt{2}\,\|C\Delta\theta\|}$, тогда $Et_N=0$, $Et_N^2=1$, и если выполнено условие Линдеберга (по аналогии с п. 3), то последовательность $\{t_N\}$ сходится по распределению к $\mathcal{N}(0, 1)$ при $N\to\infty$. Надежность в этом случае может быть приближенно вычислена при $N\to\infty$ по формуле

$$\alpha(\xi)=\Phi\left(\lim_{N\to\infty}\ \sup_{\Delta\theta}\frac{T_N(\xi, \theta_0, \Delta\theta)}{\sqrt{2}\,\|C\Delta\theta\|}\right). \tag{10}$$

Если $\left.\dfrac{\partial \ln p(\xi, \theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta_0}=0$, то надежность будет максимальной независимо от направления $\Delta\theta$ и равной 0,5. В противном случае задача (10) аналогична задаче на минимум

$$\inf_{\Delta\theta}\{\|(\psi-\bar{1})-C\Delta\theta\|^2 \mid \|C\Delta\theta\|^2=1\},\ \psi=(\eta_1^2, \eta_2^2, \ldots, \eta_N^2),$$

решение которой

$$\Delta\theta^{(\alpha)}=\frac{C^-(\psi-\bar{1})+(I-C^-C)\,x}{\|CC^-(\psi-\bar{1})\|}, \tag{11}$$

где $x\in\mathcal{R}^{(k)}$ — любой вектор, при этом надежность

$$\alpha(\xi)=\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\|CC^-(\psi-1)\|\right). \tag{12}$$

в) В общем случае, когда $c_{ij} \neq 0$ и $b_{ij} \neq 0$, $i=1, 2, \ldots, N$; $j=1, 2, \ldots, k$, надежность при $N \to \infty$ может быть найдена как решение задачи на максимум:

$$\alpha(\xi) = \Phi\left(\lim_{N\to\infty} \sup_{\Delta\theta} \frac{(\eta, B\Delta\theta) + ((\psi - \bar{1}), C\Delta\theta)}{\sqrt{\|B\Delta\theta\|^2 + 2\|C\Delta\theta\|^2}}\right). \quad (13)$$

Задачу (13) аналогично задачам (7), (10) можно свести к виду

$$\inf_{\Delta\theta}\left\{\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \bar{1}) - \sqrt{2}C\Delta\theta\right\|^2 + \|y - B\Delta\theta\|^2 \mid 2\|C\Delta\theta\|^2 + \|B\Delta\theta\|^2 = 1\right\},$$

решение которой имеет вид

$$\Delta\theta^{(\alpha)} = \gamma(2C^*C + B^*B)^{-1}(C^*(\psi - 1) + B^*\eta), \quad (14)$$

где γ находится из условий нормировки

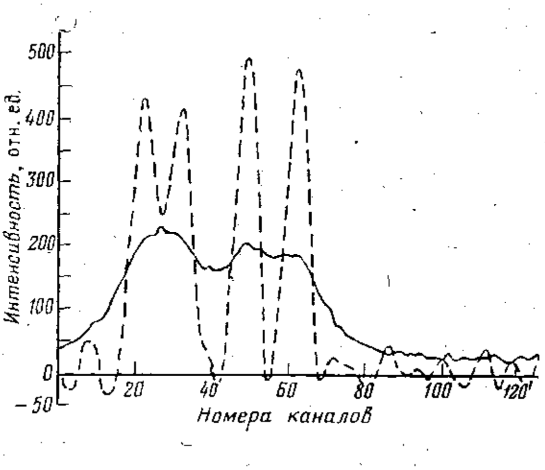
$$2\|C\Delta\theta\|^2 + \|B\Delta\theta\|^2 = 1.$$

Подставляя (14) в (13), получим предельное значение надежности при $N \to \infty$.

5. Вернемся к схеме эксперимента (1) и модели с априорной информацией $[A, F, f_0, \Sigma]$. Рассмотрим простейший случай, когда шум в эксперименте предполагается белым с неизвестной дисперсией, т. е. $\Sigma = \theta_1 I$, а априорная информация о сигнале f имеет вид $f_0 = 0$, $F = \theta_2 I$, где θ_1, θ_2 — два параметра задачи. Выбирая в качестве базиса $\{\tilde{e}_i\}$ базис собственных функций оператора $A: A\tilde{e}_i = a_i\tilde{e}_i$, получим, что вектор $\tilde{\xi} = \sum_{i=1}^{N_s^*} (\xi, \tilde{e}_i)\tilde{e}_i$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсионной матрицей, в которой ненулевыми являются только диагональные элементы, равные $\sigma_i^2 = \theta_2 a_i a_i^* + \theta_1$. Так как $\partial\sigma_i^2/\partial\theta_1 = 1$ и $\partial\sigma_i^2/\partial\theta_2 = a_i a_i^*$, то для нахождения надежности воспользуемся формулами (11)—(12), где

$$\psi_i = \frac{\xi_i\xi_i^*}{\theta_2 a_i a_i^* + \theta_1}; \quad c_{i1} = \frac{1}{2(\theta_2 a_i a_i^* + \theta_1)}; \quad c_{i2} = \frac{a_i a_i^*}{2(\theta_2 a_i a_i^* + \theta_1)}.$$

На рисунке приведен пример решения модельной задачи с использованием быстрого преобразования Фурье. Сигнал f был выбран как совокупность четырех линий одинаковой амплитуды и полуширины, расположенных в 22, 31, 49 и 62-м каналах (при размерности, равной 128). Аппаратная функция имела лоренцеву форму линии с полушириной семь каналов. Решалась прямая задача и добавлялся аддитивный нормальный шум с дисперсией, равной 0,1. Было найдено, что максимальная надежность по параметрам достигается при $\theta_{10} = 0{,}092$



Результаты эксперимента (сплошная линия) и математической обработки при значениях параметров $\theta_{10} = 0{,}092$; $\theta_{20} = 36\,000$, соответствующих максимальной надежности (штриховая линия) и $\theta_{20}=36\,000$. Для сравнения были найдены значения параметров, при которых надежность не превышает 0,005. В этих случаях наблюдалось либо существенное сглаживание результатов ($\theta_1=0,25$; $\theta_2=36\,000$), либо значительные осцилляции ($\theta_1=0,092$; $\theta_2=1\,000\,000$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П.//Матем. сб. 1983. **120**, № 2. С. 240. [2] Пытьев Ю. П.//ДАН СССР. 1987. **295**, № 3. С. 542. [3] Леман Э. Проверка статистических гипотез. М., 1978. [4] Боровков А. А. Теория вероятностей. М., 1986.

Поступила в редакцию
04.04.88

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 4

УДК 517.9:536.2

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТРЕХСТАДИЙНЫМ ПРОЦЕССОМ ГОРЯЧЕГО ПРЕССОВАНИЯ

В. Б. Гласко, А. Н. Тихонов, М. К. Трубецков

(*кафедра математики*)

На основе простой модели процесса горячего прессования, описывающей индукционный нагрев и последующие теплофизические процессы, исследуются возможные постановки задачи оптимизации и способы ее решения. Приводится основной результат численного моделирования.

1. В современной порошковой металлургии при получении деталей из тугоплавких материалов часто используются процессы типа динамического горячего прессования [1]. Такие процессы заключаются в горячей допрессовке пористых заготовок, полученных, например, методами холодного прессования.

Стремление повысить качество горячего прессования за счет повышения температуры заготовки и увеличения длительности процесса, как известно, не приводит к желаемому эффекту, так как снижается прочность детали вследствие собирательной рекристаллизации и других нежелательных явлений [2]. Поэтому большой интерес представляет постановка задачи оптимизации процесса посредством управления нагревом заготовки. Задачи такого типа исследовались в работе [3] для другой технологии обработки порошков. Для изучаемого здесь процесса горячего прессования такой подход до последнего времени исследован не был.

2. Рассмотрим достаточно длинную цилиндрическую заготовку; аксиальная симметрия задачи позволяет сформулировать одномерную математическую модель.

Технологический процесс состоит из трех стадий. На первой стадии пористая заготовка радиуса R находится в соленоидальном индукторе и нагревается высокочастотными индукционными токами в вакууме. Для единственной ненулевой z-компоненты магнитного поля (опустим зависимость от времени вида $e^{i\omega t}$, ω — циклическая частота) можно получить следствие уравнений Максвелла:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\lambda(u)}\frac{\partial H}{\partial r}\right)-i\omega\mu(u)\mu_0 H=0,\ 0<r<R,$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\ H|_{r=R}=nI(t). \tag{1}$$