

и  $\theta_{20}=36\,000$ . Для сравнения были найдены значения параметров, при которых надежность не превышает 0,005. В этих случаях наблюдалось либо существенное сглаживание результатов ( $\theta_1=0,25$ ;  $\theta_2=36\,000$ ), либо значительные осцилляции ( $\theta_1=0,092$ ;  $\theta_2=1\,000\,000$ ).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пытьев Ю. П. // Матем. сб. 1983. 120, № 2. С. 240. [2] Пытьев Ю. П. // ДАН СССР. 1987. 295, № 3. С. 542. [3] Леман Э. Проверка статистических гипотез. М., 1978. [4] Боровков А. А. Теория вероятностей. М., 1986.

Поступила в редакцию  
04.04.88

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 4

УДК 517.9:536.2

### ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТРЕХСТАДИЙНЫМ ПРОЦЕССОМ ГОРЯЧЕГО ПРЕССОВАНИЯ

В. Б. Гласко, А. Н. Тихонов, М. К. Трубецков

(кафедра математики)

На основе простой модели процесса горячего прессования, описывающей индукционный нагрев и последующие теплофизические процессы, исследуются возможные постановки задачи оптимизации и способы ее решения. Приводится основной результат численного моделирования.

1. В современной порошковой металлургии при получении деталей из тугоплавких материалов часто используются процессы типа динамического горячего прессования [1]. Такие процессы заключаются в горячей допрессовке пористых заготовок, полученных, например, методами холодного прессования.

Стремление повысить качество горячего прессования за счет повышения температуры заготовки и увеличения длительности процесса, как известно, не приводит к желаемому эффекту, так как снижается прочность детали вследствие собирательной рекристаллизации и других нежелательных явлений [2]. Поэтому большой интерес представляет постановка задачи оптимизации процесса посредством управления нагревом заготовки. Задачи такого типа исследовались в работе [3] для другой технологии обработки порошков. Для изучаемого здесь процесса горячего прессования такой подход до последнего времени исследован не был.

2. Рассмотрим достаточно длинную цилиндрическую заготовку; аксиальная симметрия задачи позволяет сформулировать одномерную математическую модель.

Технологический процесс состоит из трех стадий. На первой стадии пористая заготовка радиуса  $R$  находится в соленоидальном индукторе и нагревается высокочастотными индукционными токами в вакууме. Для единственной ненулевой  $z$ -компоненты магнитного поля (опустим зависимость от времени вида  $e^{i\omega t}$ ,  $\omega$  — циклическая частота) можно получить следствие уравнений Максвелла:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\lambda(u)} \frac{\partial H}{\partial r} \right) - i\omega \mu(u) \mu_0 H = 0, \quad 0 < r < R,$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad H|_{r=R} = nI(t). \quad (1)$$

Здесь  $\lambda(u)$  и  $\mu(u)$  — эффективная электропроводность и относительная магнитная проницаемость пористой заготовки, зависящие от температуры  $u$ ;  $n$  — число витков индуктора, приходящихся на 1 м длины;  $I(t)$  — «медленная» амплитуда силы тока в индукторе, меняющаяся со временем  $t$ . Граничное условие при  $r=0$  следует из того, что аксиальная компонента плотности тока  $j_{\psi}|_{r \rightarrow +0} \rightarrow 0$ ; на поверхности образца  $r=R$  тангенциальная составляющая магнитного поля непрерывна.

Тепловое поле описывается следующими нелинейными уравнениями теплопроводности:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rk(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{2\lambda(u)} \left| \frac{\partial H}{\partial r} \right|^2 = c(u) \rho(u) \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$0 < r < R, \quad 0 < t < t_1,$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \lim_{r \rightarrow +0} rk(u) \frac{\partial u}{\partial r} = 0,$$

$$-k(u) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \delta \sigma (u|_{r=R} + 273,15)^4 - (u_e + 273,15)^4, \quad (2)$$

где  $u$  — температура в градусах Цельсия,  $k(u)$ ,  $c(u)$ ,  $\rho(u)$  — соответственно теплопроводность, теплоемкость и плотность пористого материала,  $u_0$  — начальная температура,  $u_e$  — температура окружающей среды. Плотность тепловых источников в системе (2) определяется токками Фуко, граничное условие при  $r=R$  описывает лучистый теплообмен,  $\delta$  — степень черноты поверхности образца,  $\sigma$  — постоянная Стеффана—Больцмана.

На второй стадии ( $t_1 < t < t_2$ ) заготовка остывает в вакууме при переносе в прессформу, процесс остывания также описывается уравнениями (2) при  $H \equiv 0$ , в качестве начального условия при  $t=t_1$  берется поле температур, полученное к моменту окончания стадии нагрева.

Собственно горячее прессование происходит на третьей стадии ( $t > t_2$ ) под давлением при помещении заготовки в пресс-форму. Соответствующие теплофизические процессы с учетом изменения параметров материала заготовки при ее уплотнении могут быть описаны следующими уравнениями:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rk'(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) = c'(u) \rho'(u) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < R, \quad t_2 < t < T,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rk_M(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) = c_M(u) \rho_M(u) \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$R < r < R_M, \quad t_2 < t < T,$$

$$\lim_{r \rightarrow +0} rk'(u) \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

$$k'(u) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R-0} = k_M(u) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R+0},$$

$$-k'(u) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R-0} = \frac{1}{R_T} (u|_{r=R-0} - u|_{r=R+0}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_M} = 0.$$

Здесь  $k'(u)$ ,  $c'(u)$ ,  $\rho'(u)$  — характеристики уплотненного материала заготовки;  $k_M(u)$ ,  $c_M(u)$ ,  $\rho_M(u)$  — характеристики материала пресс-

формы. Условия сопряжения в задаче (3) описывают тепловой контакт заготовка — пресс-форма с термическим сопротивлением зазора  $R_T$ ; в качестве начального условия при  $t=t_2$  задается температурное поле, полученное в конце стадии охлаждения для образца; начальная температура пресс-формы (при  $t=t_2$ ) фиксирована.

Совокупность задач (1) — (3) образует математическую модель рассматриваемого процесса, позволяющую определить динамику температурных полей для каждой заданной функции  $I(t)$ .

3. Задача (1) — (3) решается численно с использованием конечно-разностных методов [4]. Если ввести сдвинутые на полшага друг относительно друга пространственные сетки для задач (1) и (2), то легко строится разностная схема, аппроксимирующая исходную задачу с порядком  $O(\Delta r^2 + \Delta t)$ , где  $\Delta r$  — шаг по переменной  $r$ ,  $\Delta t$  — шаг по времени. Полученные системы разностных уравнений решаются методом прогонки для каждого временного слоя, причем вводится внешний итерационный цикл для учета нелинейности рассматриваемой задачи. Для ускорения сходимости этого цикла выгодно записать краевое условие в задаче (2) в «линеаризованном» виде:

$$-k(u) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \delta \tilde{\sigma}(u|_{r=R}, u_e)(u|_{r=R} - u_e),$$

где  $\tilde{\sigma}(u, u_e) = ((u + 273,15)^2 + (u_e + 273,15)^2)(u + u_e + 2 \cdot 273,15)$ .

4. Качество прессовки образца во многом определяется степенью сцепления зерен в материале, которая зависит от большого количества разнообразных факторов (диффузионные процессы, химические и фазовые превращения и т. д.). Эти факторы при заданном давлении прессования в значительной степени определяются динамикой температурного поля, описываемого задачей (1) — (3). В качестве соответствующей количественной характеристики качества введем величину

$$F_0(r) = \int_{t_2}^T \theta(u(r, t), u_c) dt, \quad \theta(u, v) = \begin{cases} u, & u \geq v, \\ 0, & u < v, \end{cases} \quad (4)$$

характеризующую экспозицию каждой точки образца температурой, превышающей температуру активации  $u_c$ . Будем считать, что прессование имеет хорошее качество в той области  $r \in \mathcal{R}$ , где экспозиция превышает пороговое значение  $F_0$ :

$$\mathcal{R} = \{r \in [0, R] : F_0(r) \geq \hat{F}_0\}. \quad (5)$$

Величина  $F_0$  задается эмпирически с учетом прилагаемого к заготовке давления и свойств пористого материала.

Обязательными требованиями к процессу прессования являются следующие:  $r=0 \in \mathcal{R}$  — центр образца должен быть хорошо спрессован и область  $\mathcal{R}$  должна быть односвязной. Эти условия каждый раз легко проверяются в ходе решения задачи оптимизации, к формулировке которой мы переходим.

Согласно (5) определим радиус спрессованной области образца  $r_{\max} = \sup_{r \in \mathcal{R}} r$  и введем целевой функционал

$$\Phi[I(t)] = R - r_{\max}[I(t)], \quad (6)$$

характеризующий размер области с плохим качеством прессования.

Стремление уменьшить указанную область приводит к вариационной постановке задачи оптимизации

$$I(t) = \arg \inf_{I \in J} \Phi [I], \quad (7)$$

где  $J$  — множество ограничений, накладываемых на управление  $I(t)$ , которое определяется следующими условиями. Очевидно, что амплитуда силы тока  $I(t) \geq 0$ . Кроме этого, имеются ограничения на поведение температурных полей (в терминах теории задач оптимального управления — ограничения на фазовые переменные [5]). Во-первых, в любой момент времени во избежание нежелательных процессов температура не должна превышать критического значения  $\hat{u}$ , во-вторых, в момент помещения образца в пресс-форму температура его поверхности  $u(R, t_2) \leq u_k$ . Последнее ограничение особенно важно при прессовании заготовок из тугоплавких активных материалов и учитывается при реализации вычислительной схемы для задачи (1) — (3): момент времени  $t_2$ , а значит, и время остывания образца  $t_{охл} = t_2 - t_1$  выбираются из условия  $t_2 = \min t | t > t_1, u(t, R) \leq u_k$ .

Предварительный численно-экспериментальный анализ задачи (7) показывает, что при достаточно малых величинах амплитуды силы тока в индукторе  $I(t)$  нагрев недостаточно интенсивен, температура заготовки в момент помещения ее в пресс-форму ниже температуры активации  $u_c$  (4) и  $\Phi [I] = R = \text{const}$  (процесс прессования еще «не включается»). Поэтому для избежания трудностей при численной минимизации в выражение для целевого функционала (6) введем штраф  $\tilde{S}$  за недостаточный нагрев. Ограничение на максимальную температуру заготовки во избежание ее перегрева также удобно учесть методом штрафных функций [6, 7], соответствующий штраф обозначим  $S$ . Тогда экстремальная задача принимает вид

$$I(t) = \arg \inf [\Phi [I] + \alpha (\hat{S}^2 [I] + \check{S}^2 [I])], \quad (8)$$

где

$$\hat{S} [I] = \max \left\{ \max_{\substack{0 \leq r \leq R \\ 0 \leq t \leq t_1}} u(r, t) - \hat{u}, 0 \right\},$$

$$\check{S} [I] = \max \left\{ u_c - \max_{0 \leq r \leq R} u(r, t_2), 0 \right\},$$

$\alpha$  — параметр метода штрафных функций.

Из физических соображений достаточно очевидна некорректность постановки задачи (8) [6, 8], так как большие локальные вариации управления  $I(t)$  слабо влияют на температурные поля, а значит, и на целевой функционал. Этот вывод подтверждается и вычислительным экспериментом, в котором функционал (8) минимизировался методом сопряженных градиентов с конечно-разностным представлением градиента [7] и методом Пауэлла [9].

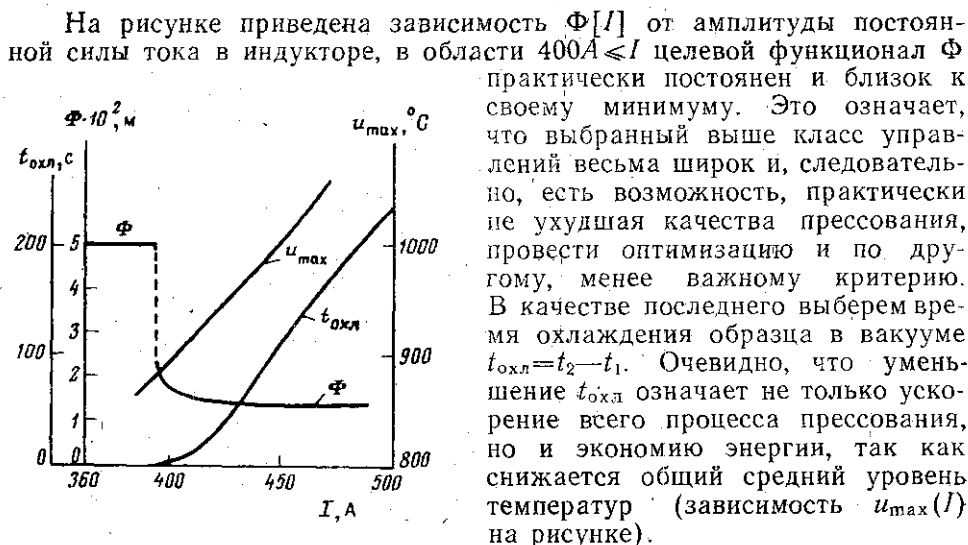
Одним из способов регуляризации задачи является выбор управляющей функции из заданного компакта [8]; в рассматриваемой задаче можно ограничиться компактом  $I(t) = I = \text{const}$ ,  $0 \leq I \leq I_{\max}$  управлений  $I(t)$ , не зависящих от времени, так как вычислительный эксперимент показывает, что решение задачи (8) на других множествах не доставляет заметно меньших значений целевого функционала. К тому же управления, не зависящие от времени, более предпочтительны с точки зрения технической реализации.

5. Приводимые ниже результаты относятся к одному из тугоплавких порошковых материалов, электро- и теплофизические характеристики которого рассчитывались по методике, изложенной в [10]; математическое моделирование проводилось при следующих параметрах:

$$R=0,05 \text{ м}, R_M=0,15 \text{ м}, \omega=2\pi \cdot 2,4 \text{ кГц}, n=100 \text{ м}^{-1}, \delta=0,3,$$

$$u_0=500^\circ \text{ С}, u_e=20^\circ \text{ С}, R_T=3,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \cdot ^\circ \text{ С/Вт}, t_1=300 \text{ с}, u_c=850^\circ \text{ С},$$

$$u_k=900^\circ \text{ С}, u_M^0=200^\circ \text{ С}, \dot{u}=1300^\circ \text{ С}, F_0=4000^\circ \text{ С} \cdot \text{с}.$$



Задача о совместной минимизации обеих указанных величин на том же классе управлений ( $I(t)=I=\text{const}$ ) формулируется в виде

$$I = \arg \inf (\Phi[I] + \alpha (S^2 + S^2) + \beta t_{\text{охл}}), \quad (9)$$

где последний член вводит штраф за увеличение  $t_{\text{охл}}$ . Параметр  $\beta$  (в расчетах  $\beta=10^{-5}$ ) характеризует вес последнего критерия и задается априорно. Выбор параметра  $\alpha$  метода штрафных функций в задачах (8), (9) оказывается несущественным, и можно положить  $\alpha=10$ .

Минимизация (9) позволяет получить оптимальные значения характеристик процесса, при которых центр образца оказывается хорошо спрессованным, неоднозначность области с хорошим качеством прессования материала начинает наблюдаться лишь при заметно меньших силах тока.

В заключение отметим, что применявшийся подход к поиску управления  $I(t)$  среди множества функций максимально простой с точки зрения технической реализации структуры, по существу, совпадает с общей концепцией регуляризации некорректных экстремальных задач [6, 8] типа управления.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дорофеев Ю. Г. Динамическое горячее прессование пористых порошковых заготовок. М., 1977. [2] Скороход В. В., Солонин С. Н. Физико-металлургические основы спекания порошков. М., 1984. [3] Вишневская Е. А., Гласко В. Б., Трубецков М. К., Попов С. Г. // Инж.-физ. журн. 1986. 50, № 5. С. 835. [4] Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1968. М., [5] Федоров

ко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М., 1978. [6] Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М., 1981. [7] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М., 1975. [8] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979. [9] Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., 1975. [10] Дульнев Г. Н., Заричняк Ю. П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов: Справочная книга. Л., 1974.

Поступила в редакцию  
13.04.88

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 4

УДК 514.8; 530.182

## АНАЛОГ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\sin$ -ГОРДОНА

А. Г. Попов

(кафедра математики)

Предложена интерпретация поверхностей постоянной отрицательной кривизны в качестве нелинейных аналогов классических фазовых пространств. Сформулирован методологический принцип для явлений, описываемых уравнением  $\sin$ -Гордона.

В классической механике и специальной теории относительности для наглядного представления физических явлений полезными оказываются простые геометрические образы фазового пространства и пространства-времени. Характерной особенностью этих представлений является использование в качестве геометрических образов плоских объектов — евклидова и псевдоевклидова пространств. В нелинейной общей теории относительности в качестве геометрических образов используются неплоские неевклидовы пространства. В настоящей работе для физических явлений, описываемых уравнением  $\sin$ -Гордона

$$\omega_{uv} = \sin \omega, \quad (1)$$

развивается геометрическая интерпретация, обобщающая пространственно-временные представления классических фазовых пространств, пространства Минковского, мировой линии.

Уравнение  $\sin$ -Гордона находит широкое применение в физике, в частности при изучении явления распространения ультракоротких импульсов в двухуровневых резонансных средах [1], динамики блоховских стенок [2], эффекта Джозефсона [3].

Первоначально уравнение  $\sin$ -Гордона возникло в дифференциальной геометрии как уравнение реализации частей плоскости Лобачевского  $\Lambda^2$  в трехмерном евклидовом пространстве  $E^3$  в качестве поверхностей постоянной отрицательной кривизны, равной  $-1$ , с метрикой

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega(u, v) du dv + dv^2. \quad (2)$$

В выражении (2) за координатные линии  $u, v$  приняты асимптотические линии чебышёвской сети (сети с равными противоположными сторонами элементарного координатного четырехугольника) на рассматриваемой поверхности, при этом решение  $\omega(u, v)$  уравнения (1) имеет смысл сетевого угла. Поверхность постоянной отрицательной кривизны, равной  $-1$ , отвечающую в  $E^3$  решению  $\omega(u, v)$  уравнения  $\sin$ -Гордона, обозначим  $\Phi[\omega]$ .