Из (14), (15) видно, что

$$|\omega(u, v)-\Theta(u)|\to 0,\ v\to+\infty. \tag{16}$$

Соотношение (16) означает, что при достаточно больших значениях времени площадь импульса Θ и решение $\omega(u, v)$ бесконечно близки, а следовательно, для площади импульса Θ справедлив принцип (12), (13). Сформулированный принцип выражает в случае (13) эффект самоиндуцированной прозрачности (распространение импульса в среде без изменения площади импульса Θ), а соотношение (12) отвечает так называемой теореме площадей. Предлагаемый геометрический подход позволил более простыми (геометрическими) методами обосновать физические закономерности, выявленные при изучении рассматриваемого явления [1].

Таким образом, использование в качестве фазовых поверхностей поверхностей $\Phi[\omega]$ (ненулевой кривизны) дает возможность принципиально нового (геометрического) подхода к изучению физических явлений.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Э. Г. Позняку и д-ру физ.-мат. наук Д. Д. Соколову за полезные обсуждения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Lamb G. L. jr.//Rev. Mod. Phys. 1971. **43**, N 2. P. 99. [2] Enz U.//Helv. Phys. Acta. 1964. **37**, Fasc. 3. P. 245. [3] Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона. М., 1984. [4] Позняк Э. Г.//Дифф. уравнения. 1979. **15**, № 7. С. 1332. [5] Beltrami E.//Giorn. di Mat. 1872. **10**, Opere II. P. 12.

Поступила в редакцию
28.04.88

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 4

УДК 530.145.6

ОДНОМЕРНЫЙ АТОМ ВОДОРОДА

В. Б. Гостев, В. К. Перес-Фернандес, А. Р. Френкин, Г. А. Чижов

(*кафедра теоретической физики*)

Найдены невырожденные уровни энергии с устойчивым основным состоянием для одномерного нерелятивистского движения в кулоновском поле. Для их определения использован физически обоснованный выбор самосопряженного расширения гамильтониана.

Изучение нерелятивистского одномерного движения системы с кулоновским взаимодействием ($1H$), описываемой уравнением Шрёдингера ($\hbar=2m=1$)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\lambda\,|x|^{-1}\,\psi+E\psi=0,\quad -\infty<x<\infty, \tag{1}$$

где $\lambda>0$, $E<0$, имеет почти тридцатилетнюю историю [1] (обзор в [2, 3]) и было вызвано тем, что уравнение (1) соответствует реальной физической ситуации — движению электрона в кулоновском и сильном магнитном полях [4, с. 527—528].

Несмотря на то что уравнение (1) по виду совпадает с радиальным уравнением в кулоновском поле ($l=0$), обсуждение решений (1) в отличие от радиального случая продолжается до сих пор.

«Стандартными» являются два следующих результата:

1) вырождение уровней энергии по четности [1; 2; 4, с. 527; 5]:

$$E_{n-}=E_{(n+1)+}=-\frac{1}{4(n+1)^2},\ n=0,\ 1,\ 2; \tag{2}$$

2) падение основного четного уровня [1, 2, 5]:

$$E_{0+}\to-\infty,\ \psi^2{}_{0+}\to\delta(x). \tag{3}$$

Эти результаты были получены путем регуляризации кулоновского потенциала, например, [1, 2, 6],

$$|x|^{-1}\to(|x|+a)^{-1},\quad a>0,\ a\to+0. \tag{4}$$

Однако этот метод, вполне действенный в случае нечетных (радиальных) решений [4, с. 144], неприменим для четных решений, удовлетворяющих условию

$$\psi_+{}'(0)\psi_+{}^{-1}(0)=0, \tag{5}$$

так как матричный элемент возмущения $\lambda(|x|^{-1}-(|x|+a)^{-1})$ расходится на ψ_+ логарифмически [7].

Ситуация (2), (3) получалась и с помощью **нерелятивистского** перехода из решения уравнения Клейна—Гордона [2, 3]. **На наш** взгляд, этот переход сделан неверно. Обсуждение релятивистского уравнения будет дано в отдельной публикации. Не связаны падение (3) и вырождение (2), вопреки утверждению работ [5], и с дополнительной [4, с. 154—156] симметрией кулоновского поля [8].

Результаты (2), (3) не оправдываются и апостериори, что было отмечено в литературе. Однако предложенные способы устранения ситуации (2), (3) — произвольный выбор энергии основного состояния [6] и изменение размерности пространства $1\to1+\delta$ [2] — неконструктивны.

Основными дефектами ситуации (2), (3) являются: 1) мгновенное высвечивание всех возбужденных нечетных состояний за счет дипольного перехода в состояние (3); 2) противоречие общим принципам квантовой механики одномерного финитного движения — невырожденности уровней и устойчивости основного состояния [4, с. 82—86]; 3) тот факт, что решения (2), (3) не являются собственными значениями никакого из множества самосопряженных расширений гамильтониана (1) на $(0,\infty)$ [7]; 4) полное запирание ($T=0$) кулоновского барьера (ямы) при конечной проницаемости даже более сингулярного барьера $V=\lambda x^{-2}$ [9].

В силу изложенного рассмотрим здачу (1) вновь. Общее решение уравнения Шрёдингера, убывающее при $x\to+\infty$, имеет вид ($\lambda>0$, $x\geqslant0$, $E<0$) [10]

$$\psi=xe^{-\frac{\lambda x}{2q}}U\left(1-q,\ 2,\ \frac{\lambda x}{q}\right), \tag{6}$$

где

$$q=\frac{\lambda}{2}(-E)^{-1/2}>0,\ E=-\frac{\lambda^2}{4q^2}, \tag{7}$$

$U(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, регулярная на бесконечности [11, с. 321—322].

Из-за невозможности удовлетворить стандартному условию для четных функций (5) рассмотрим множество всех самосопряженных расширений гамильтониана (1) на $(0, \infty)$. Оно характеризуется граничным условием, зависящим от произвольной функции $h(\lambda)$ [7],

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}+\lambda\ln\lambda\right)=h(\lambda), \tag{8}$$

которой соответствует дополнительный точечный потенциал [7]

$$V=-2\lambda\ln|x|\delta(x)+V_\delta,\qquad V_\delta=2h\delta(x). \tag{9}$$

Регуляризации (4) соответствует согласно формулам (4), (5), (9) потенциал [9]

$$V_{\delta a}=2\lambda\ln a\delta(x),\qquad a\to+0, \tag{10}$$

т. е. $h\to-\infty$ (9) и, следовательно [8], падение (3).

Выбор функции $h(\lambda)$ является физической задачей [12]. Не фиксируя пока эту функцию, заметим, что произвольной $h(\lambda)$ соответствует трансцендентное уравнение для четных уровней, получаемое из условия (8) и вида волновой функции (6) [10]:

$$\lambda(-\ln\lambda-2\gamma+g(q))=h(\lambda), \tag{11}$$

где $\gamma=0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера,

$$g(q)=\ln q-(2q)^{-1}-\psi(q)-\pi\operatorname{ctg}\pi q, \tag{12}$$

$\psi(q)$ — пси-функция [11, с. 84—85].

Так как $g'(q)>0$, $q\neq0, 1, 2, \ldots$, то при конечной функции $h(\lambda)$ четные уровни (7) — корни уравнения (11) q_{n+} в порядке возрастания номера $n=0, 1, 2, \ldots$ лежат ниже нечетных q_{n-}:

$$n=q_{(n-1)-}<q_{n+}<q_{n-}=n+1, \tag{13}$$

которые определяются полюсами функции $g(q)$ (12) $q_n=n+1$, $n=0, 1, \ldots$, ($h=+\infty$ (11)). Нечетные волновые функции совпадают с радиальными ($l=0$) [4, с. 148]. Полюс функции $g(q)$ $q=0$ как корень уравнения (11) с $h=-\infty$ приводит к ситуации (3).

Таким образом, тривиальное требование выбора произвольного расширения гамильтониана, отличного от описываемого условиями $\psi(0)=0$ ($h=+\infty$) или $h\to-\infty$, уничтожает вырождение и падение.

Физически естественно потребовать непрерывность перехода решений уравнения Шрёдингера (1), $E>0$ при $\lambda\to0$ в волновые функции свободного движения (отсутствие явления Клаудера [13]):

$$h(0)=0. \tag{14}$$

Наложив также требование масштабной инвариантности — преобразование энергии по закону $E_n'=k^{-2}E_n$ ($\lambda'=k^{-1}\lambda$) при изменении масштаба длины $x'=kx$ (условие (8) должно быть форминвариантно относительно этого преобразования), получим с учетом условия (14)

$$h(\lambda)=-\lambda\ln|\lambda|+D\lambda. \tag{15}$$

Независимо от значения D из формул (9), (15) следует, что поправки теории возмущений к четным уровням в удерживающем поле (например, $V(x)=x^2$), вызванные кулоновским возмущением $\lambda|x|^{-1}$, пропорциональны λ^n и $(\lambda\ln|\lambda|)^n$.

Для определения постоянной D исследуем аналог уравнения (11) для связанного состояния при кулоновском отталкивании, полученный из уравнений (1), (7) при $\lambda<0$:

$$\psi(q)-(2q)^{-1}-\ln q=-D-2\gamma. \qquad (16)$$

Из требования отсутствия связанных состояний получаем ограничение $D\leqslant 2\gamma$, а из требования появления единственного связанного состояния при включении потенциала притяжения $V=-t\delta(x)$, $t>0$, находим противоположное неравенство. Оба этих требования однозначно дают

$$D=-2\gamma \qquad (17)$$

и характеристическое уравнение для четных уровней, приведенное без вывода в [8]:

$$g(q)=0. \qquad (18)$$

В силу асимптотики функции (12) [11, с. 84—85]

$$g(q)=-\pi\operatorname{ctg}\pi q+\frac{1}{12}q^{-2}+\ldots,\ q\gg 1, \qquad (19)$$

имеет место асимптотическая ($n\gg 1$) эквидистантность уровней в шкале q:

$$q_{n+}=n+{}^1/_2. \qquad (20)$$

Четные (ненормированные) волновые функции даются формулой (6) при $q=q_{n+}$ ($n=0, 1, \ldots$), где q_{n+} — возрастающие корни уравнения (18), (12) ($q_{0+}=0{,}468$).

Таким образом, нам удалось реабилитировать основные положения квантовой механики одномерного финитного движения [4, с. 82—86] — устойчивость основного состояния и невырожденность уровней энергии — для физически важного случая одномерного кулоновского поля и построить четные волновые функции и уровни энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Loudon R.//Amer. J. Phys. 1959. **27**. P. 649. [2] Moss R. E.//Amer. J. Phys. 1987. **55**. P. 397. [3] Spector H. N., Lee J.//Ibid. 1985. **53**. P. 248. [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1974. [5] Davtyan L. S., Pogosyan G. S., Sissakian A. N., Ter-Antonyan V. M.//J. Phys. A. 1987. **20**. P. 2765; van Siclen C.//Amer. J. Phys. 1988. **56**. P. 9. [6] Haines L. K., Roberts D. H.//Amer. J. Phys. 1969. **37**. P. 1145. [7] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р.//ТМФ. 1987. **70**. С. 384. [8] Гостев В. Б., Гостев И. В., Френкин А. Р.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1988. **29**, № 5. С. 9. [9] Гостев В. Б., Френкин А. Р.//ТМФ. 1988. **74**. С. 247. [10] Гостев В. Б., Гостев И. В., Френкин А. Р.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1987. **28**, № 5. С. 77. [11] Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М., 1979. [12] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., 1978. Т. 2. С. 156. [13] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., 1982. Т. 4. С. 77.

Поступила в редакцию
13.05.88