КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.91/943

КОЛЕБАНИЯ В МЕЛКОСЛОИСТЫХ УПРУГО-ВЯЗКИХ СРЕДАХ

Г. Н. Медведев, Б. И. Моргунов

(*кафедра математики*)

Рассматриваются системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, которые описывают механические колебания в средах, состоящих из слоев как с упругими, так и вязкими свойствами. Излагается асимптотическое исследование таких систем, основанное на усреднении.

В нашем сообщении рассматривается задача о колебаниях в слоистых средах. Система состоит из большого числа одинаковых плоских слоев с изменяющимися по толщине характеристиками. Предполагается, что наряду с упругими свойствами материал слоев обладает слабыми наследственными свойствами.

Если отношение толщины слоя к толщине пакета мало ($\varepsilon \ll 1$), то процессы колебаний в подобных средах описываются интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с быстро осциллирующими (по координате, ортогональной слоям) коэффициентами. Отмеченное обстоятельство позволяет приближенно описать процесс колебаний с помощью более простых уравнений с некоторыми постоянными, осредненными коэффициентами. Подобная асимптотическая методика была разработана и обоснована Н. С. Бахваловым и Г. П. Панасенко [1].

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях упруго-вязкого слоистого стержня, моделирующего амортизирующее устройство. Один конец стержня ($x=0$) колеблется по гармоническому закону. С другим концом стержня ($x=l$) жестко скреплено абсолютно твердое тело массы M (амортизируемое изделие). Перемещение точек стержня определяется функцией u, являющейся решением следующей задачи:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left[K(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\ u|_{x=0}=A\cos\omega t,\\ K\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=-M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}.\end{gathered}\tag{1}$$

Коэффициенты ρ и K для данного слоистого стержня изменяются по толщине слоя. Это изменение удобно описать, считая ρ и K функциями «быстрой» координаты $\xi=x/\varepsilon$. Отметим, что функция u (решение (1)) при этом будет зависеть от x, t, ξ, ε. Ограничимся рассмотрением частного случая, когда каждый слой состоит из двух однородных слоев с различными характеристиками:

$$\rho(\xi)=\begin{cases}\rho_1, & 0<\xi<\sigma,\\ \rho_2, & \sigma<\xi<1,\end{cases}\quad K(\xi,\mu)=K_0+\mu K_1=\begin{cases}K_{01}+\mu K_{11}, & 0<\xi<\sigma,\\ K_{02}+\mu K_{12}, & \sigma<\xi<1,\end{cases}\tag{2}$$

где ρ_1, ρ_2, K_{01}, K_{02} — постоянные; K_{11}, K_{12} — интегральные операторы, учитывающие вязкие свойства материала [2, 3]:

$$K_{1i}\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t}R_i(t-s)\varphi(s)\,ds,\quad i=1,2\tag{3}$$

(R_i — ядро релаксации). Отметим, что в [1] рассматривались коэффициенты K без «вязких» интегральных членов.

Малый параметр μ в (3) учитывает малую вязкость материала. Здесь будет рассмотрен случай, когда $\mu=\sqrt{\varepsilon}$.

Нас интересует процесс вынужденных колебаний, т. е. 2π-периодические по t решения задачи (1)—(3). Это решение будем искать в виде

$$u(x, t, \xi, \varepsilon) = u_0 + \sqrt{\varepsilon}\, u_1 + \varepsilon u_2 + \varepsilon^{3/2} u_3 + \varepsilon^2 u_4 + \varepsilon^{5/2} u_5 + \ldots \tag{4}$$

Подстановка (4) в (1)—(3) приводит к рекуррентной системе соотношений, позволяющих определить коэффициенты разложения (4):

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[K_0 \frac{\partial u_0}{\partial\xi}\right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(K_1 \frac{\partial u_0}{\partial\xi}\right) + K_0 \frac{\partial u_1}{\partial\xi}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[K_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial\xi}\right) + K_1 \frac{\partial u_1}{\partial\xi}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[K_0 \frac{\partial u_0}{\partial\xi}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[K_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi}\right) + K_1\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial\xi}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[K_0 \frac{\partial u_1}{\partial\xi} + K_1 \frac{\partial u_0}{\partial\xi}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[K_0\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_4}{\partial\xi}\right) + K_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi}\right)\right] + \tag{5}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left[K_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial\xi}\right) + K_1 \frac{\partial u_1}{\partial\xi}\right] = \rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[K_0\left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_5}{\partial\xi}\right) + K_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_4}{\partial\xi}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left[K_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi}\right) + K_1\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial\xi}\right)\right] = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.$$

Из первых двух уравнений (5) согласно [1] следует, что функции u_0 и u_1 не зависят от ξ. Из третьего и четвертого уравнений (5) определяются $\partial u_2/\partial\xi$ и $\partial u_3/\partial\xi$ через u_0, u_1 и их производные [1]. Последние два уравнения (5) можно существенно упростить, выполняя усреднение по быстрой переменной ξ [1]:

$$\widehat{K}_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \langle\rho\rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \tag{6}$$

$$\widehat{K}_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \langle\rho\rangle \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \left\langle \frac{1}{K_0^2} \right\rangle \widehat{K}_0^2 \left(K_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right). \tag{7}$$

В (6) и (7) использованы операторы $\langle f\rangle = \int\limits_0^1 f(\xi)\, d\xi$ (среднее по периоду 1-периодической функции быстрой переменной ξ), $\widehat{G} = \langle G^{-1}(\xi)\rangle^{-1}$.

Уравнения (6) и (7) решаются совместно с граничными условиями:

$$u_0|_{x=0} = A\cos\omega t, \quad \widehat{K}_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}\bigg|_{x=l} = -M \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}, \tag{8}$$

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad \widehat{K}_0 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=l} = -M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\bigg|_{x=l} - \left\langle \frac{1}{K_0^2} \right\rangle \widehat{K}_0^2 \left(K_1 \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\bigg|_{x=l}. \tag{9}$$

Задача (6), (8) решается методами [4]. После этого решается задача (7), (9), отличающаяся от (6), (8) неоднородностью, представляющей собой результат применения оператора (3) к известному решению задачи (6), (8). Для функций u_2, u_3 и т. д. получаются квадратурные формулы, которые мы здесь не приводим.

Обоснование описанного алгоритма может быть проведено по методике, разработанной в [1]. Для этого следует оценить порядок коэффициентов разложения u_i и их производных. Далее составляются уравнения для разности точного и приближенного решений. Оценка этой величины проводится методами теории дифференциальных уравнений в частных производных [5]. Если в приближенном решении ограничиться членами до ε^2 включительно, то погрешность этого приближения будет иметь, вообще говоря, порядок $\sqrt{\varepsilon}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984. [2] Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970. [3] Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М., 1984. [4] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1972. [5] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.

Поступила в редакцию
13.06.88

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 4

УДК 539.123.17; 539.124.17

О САМОПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ, ДВИЖУЩИХСЯ В СПИРАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ОНДУЛЯТОРЕ

В. Г. Багров, В. В. Белов, И. М. Тернов, А. Ю. Трифонов

(кафедра теоретической физики)

Изучено явление самополяризации электронного спина в процессе спонтанного излучения при движении электронов в спиральном магнитном ондуляторе. Показано, что количественные характеристики — степень поляризации и время релаксации — отличаются от аналогичных в синхротронном излучении.

Исследованию излучения электронов, движущихся в спиральном магнитном ондуляторе, посвящена обширная литература. Однако до сих пор не было проведено исследование возможности радиационной самополяризации электронов, движущихся в таком ондуляторе, аналогичной явлению, наблюдаемому в синхротронном излучении [1]. Здесь мы проводим такое исследование и показываем, что радиационная самополяризация должна иметь место, однако количественные характеристики явления отличаются от полученных в [1] для синхротронного излучения. Отметим, что основные свойства спонтанного излучения в рассматриваемом типе ондуляторов изучались в работах [2—8].

1. **Квазиклассические волновые функции электрона.** Рассмотрим электрон, движущийся в стационарном периодическом магнитном поле, определяемом векторным потенциалом

$$\mathbf{A}(z)=(A_1(z),\ A_2(z),\ 0),\ \mathbf{A}(z+l)=\mathbf{A}(z), \tag{1}$$

где $A_i(z)$ — произвольные гладкие периодические (с периодом l) функции z. Вектор напряженности магнитного поля имеет вид (точкой обозначаем производную по z)

$$\mathbf{H}=(-\dot{A}_2(z),\ \dot{A}_1(z),\ 0). \tag{2}$$

Стационарные волновые функции электрона, являющиеся собственными для операторов:

$$\begin{gathered}\widehat{p}_1\psi=p_1\psi,\ \widehat{p}_2\psi=p_2\psi,\ (\Sigma\widehat{\mathbf{P}})\psi=\zeta\lambda\psi,\\ \widehat{\mathbf{p}}=-i\hbar\nabla,\ \widehat{\mathbf{P}}=\widehat{\mathbf{p}}-(e/c)\mathbf{A}(z),\ \zeta=\pm1,\end{gathered} \tag{3}$$

имеют вид

$$\Psi=N\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et+\frac{i}{\hbar}p_1x+\frac{i}{\hbar}p_2y\right)\varphi_{E,\mathbf{p}_\perp,\zeta}(z). \tag{4}$$

В формулах (3), (4) обозначено

$$\varphi_{E,\mathbf{p}_\perp,\zeta}(z)=\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{\zeta c\lambda}{E+mc^2}\end{pmatrix}g(z,\hbar),\ g=\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\end{pmatrix},\ \begin{gathered}\lambda=(E^2c^{-2}-m^2c^2)^{1/2},\\ \mathbf{p}_\perp=(p_1,\ p_2,\ 0).\end{gathered} \tag{5}$$