УДК 539.123

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ КОМПАКТНОЙ КООРДИНАТОЙ

Д. А. Славнов

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

На примере КЭД сформулирована процедура устранения ультрафиолетовых расходимостей, сохраняющая на всех этапах локальность, релятивистскую и БРС-инвариантности.

Примем евклидову формулировку теории поля и дополним четырехмерное пространство еще одним измерением. Точки пространства будем характеризовать евклидовыми векторами

$$X \equiv (x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5) \equiv (x,\ x^5) \equiv (x,\ \varkappa),$$

точки сопряженного импульсного пространства — векторами

$$P \equiv (p^1,\ p^2,\ p^3,\ p^4,\ p^5) \equiv (p,\ p^5) \equiv (p,\ \omega).$$

Далее индексы j, k будут пробегать значения 1, 2, 3, 4, а индекс ν — значения 1, 2, 3, 4, 5.

Пусть $\varphi(X)$ — общее обозначение для всех полей, фигурирующих в теории. Потребуем, чтобы $\varphi(X)$ была периодической функцией $\varkappa$, разложимой в ряд Фурье:

$$\varphi(x,\ \varkappa) = \sum_{\omega} \exp\{-i\omega\varkappa\}\, \tilde{\varphi}(x,\ \omega), \quad \omega = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 0,\ \pm 1,\ \ldots . \tag{1}$$

Кроме того, введем усредненное по координате $\varkappa$ поле

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} d\varkappa\, \varphi(x,\ \varkappa).$$

Далее для определенности рассмотрим конкретную модель — спинорную электродинамику. Действие зададим формулой

$$W = \int dx\, \mathscr{L}_0(x) \equiv \int dx \frac{1}{2l} \int_{-l} d\varkappa\, \mathscr{L}(x,\ \varkappa),$$

где

$$\mathscr{L}(X) = \overline{\psi}(X)(\hat{\partial} + m + ieA_0^j(x)\gamma^j)\psi(X) + (1/4) F^{jk}F^{jk}(X) +$$

$$+ (1/2)\, \partial^5 A^j \partial^5 A^j(X) + (\lambda/2)(\partial^j A^j(X))^2 + \partial^\nu \overline{C} \partial^\nu C(X).$$

Здесь $C(X)$ — духовое скалярное фермионное поле; $\hat{\partial} = \gamma^\nu \partial^\nu$ (другой вариант $\hat{\partial} = \gamma^j \partial^j + i\partial^5$). В $\mathscr{L}(X)$ слагаемое, описывающее взаимодействие, $\mathscr{L}_{\rm int}$, нелокально по $\varkappa$ (по x локально).

Действие W инвариантно относительно БРС-преобразований [1], локальных по x и глобальных по $\varkappa$:

$$\delta\psi(X) = ie\varepsilon C_0(x)\psi(X), \quad \delta A^j(X) = -\varepsilon \partial^j C_0(x),$$

$$\delta\overline{C}(X) = \lambda\varepsilon \partial^j A_0^j(x), \quad \delta C(X) = 0.$$

Здесь ε — постоянный скалярный фермион.

Нетрудно добиться того, чтобы предлагаемая модель при $l\to 0$ переходила в обычную. Для этого достаточно ввести импульс обрезания Λ в разложение (1), наложив на $\varphi(X)$ дополнительное условие

$$\widetilde{\varphi}(x, \omega)=0 \text{ при } |\omega|>\Lambda.$$

Тогда при $l<\pi\Lambda^{-1}$ все поля перестают зависеть от $\varkappa$ и $\mathscr{L}_0(x)$ переходит в эффективный лагранжиан обычной электродинамики.

Исходя из действия W, стандартными методами, например с помощью континуального интеграла, легко получить формальное выражение $Z(j)$ для производящего функционала квантовых функций Грина (выписано для $\lambda=1$):

$$Z(j)=N^{-1}[\exp\{\Delta\}\cdot\exp\{-I(j, \varphi)\}\exp\{-W_{\text{int}}(\varphi)\}]_{\varphi=0}, \tag{2}$$

где

$$\Delta=\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{\omega}\int d^4p\left[-\frac{1}{2}\frac{\delta^{jk}}{P^2}\frac{\delta^2}{\delta A^j(P)\,\delta A^k(-P)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta}{\delta\psi(P)}\frac{i\widehat{P}+m}{P^2+m^2}\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(P)}\right],$$

$$W_{\text{int}}(\varphi)=e(2\pi)^4\sum_{\omega_1}\int d^4p_1\sum_{\omega_2}\delta_{\omega_1\omega_2}\int d^4p_2\sum_{\omega_3}\delta_{\omega_3 0}\int d^4p_3\delta(p_2-p_1-p_3)\times$$

$$\times\overline{\psi}(P_2)\gamma^jA^j(P_3)\psi(P_1),$$

$$I(j, \varphi)=(2\pi)^4\sum_{\omega}\int d^4p[\overline{j}(P)\psi(P)+\overline{\psi}(P)j(P)+A^j(P)j^j(P)].$$

При этом, по определению, считается, что все суммирования и интегрирования, содержащиеся в I и W_{int}, производятся после действия всех Δ на их подынтегральные выражения и выполнения операции $\varphi=0$.

Выражение (2) формальное, так как в нем присутствуют ультрафиолетовые расходимости. От них можно избавиться, если все интегралы $\int d^4p$, фигурирующие в W_{int}, заменить на перенормированные $\int d\mu(P)$, определенные для двух типов подынтегральных функций $F(P)$, которые только и встречаются при вычислении $Z(j)$. Первый тип: $F(P)\sim\delta(p+\ldots)$, тогда $\int d\mu(P)=\int d^4p$. Второй тип: $F(P)=F_1(P)+F_2(P)$, где $(P^2)^2F_1(P)$ — полином по $p^\nu k_\alpha{}^\nu$ и $\ln(p^\nu k_\alpha{}^\nu)$ (здесь K_α — какие-то постоянные пятивекторы), а F_2 убывает быстрее $(P^2)^{-2}$, так что интеграл

$$\int d^4pF_2(p, \omega)=\Phi(\omega)$$

сходится, причем функция $\Phi(\omega)$ представима в виде

$$\Phi(\omega)=\sum_{\tau>0}a_\tau\ln^\tau(\omega/\mu)+\widetilde{\Phi}(\omega, \mu).$$

Здесь a_τ не зависят от ω, а $\widetilde{\Phi}(\omega, \mu)$ — непрерывная функция ω. Обезразмеривающий параметр μ фиксируется произвольно (аналог точки вычитания). Для этого типа

$$\int d\mu(P)F(P)\equiv\widetilde{\Phi}(\omega; \mu).$$

При вычислении $Z(j)$ приходится иметь дело с многократными перенормированными интегралами. Результат, вообще говоря, зависит от их последовательности. Чтобы сохранить БРС-инвариантность, надо воспользоваться некоторой симметричной комбинацией. Одной из допустимых является следующая: сначала выполняются все интегрирования (с последующим суммированием) по импульсам, относящимся к полям A_k (переменные типа p_3, ω_3), причем все эти интегрирования полностью симметризуются. Затем то же самое делается для полей ψ, затем для $\overline{\psi}$. При этом сначала вычисляются все интегралы, которые могут быть взяты с помощью δ-функций. Приведенное здесь определение перенормированного интеграла похоже на предлагавшееся в статьях [2] и [3], но неэквивалентно ему.

После введения перенормированного интеграла при вычислении $Z(j)$ не встречаются ни ультрафиолетовые, ни инфракрасные расходимости. При предельном переходе $l \to 0$ получается функционал перенормированных функций Грина обычной четырехмерной электродинамики.

Следует обратить внимание на то, что в предлагаемом подходе набор полей такой же, как в четырехмерной теории. Этот факт особенно важен при использовании подобной процедуры в суперсимметричных моделях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Becchi C., Rouet A., Stora R. H.//Ann. of Phys. (N. Y.) 1976. **98**. P. 287. [2] Ильин В. А., Имашев М. С., Славнов Д. А.//ТМФ. 1982. **52**. С. 174. [3] Славнов Д. А.//ТМФ. 1985. **62**. С. 335.

Поступила в редакцию
08.12.88

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 4

УДК 531.19

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

П. В. Елютин, В. Г. Королев

(кафедра квантовой радиофизики)

Приведен способ приближенного вычисления корреляционных функций для гамильтоновых систем, совершающих стохастическое движение. Рассмотрен пример для модели Паллена—Эдмондса, хорошо согласующийся с данными компьютерного моделирования.

В последние годы большое внимание уделяется теории стохастического движения гамильтоновых систем [1, 2]. Важными характеристиками такого движения являются (авто)корреляционные функции динамических переменных

$$B_a(\tau) = \langle a(t+\tau)\, a(t)\rangle - \langle a(t)\rangle^2 \qquad (1)$$

(здесь угловые скобки означают усреднение по времени t [2, с. 22]). Об общих свойствах $B_a(\tau)$ известно не очень много. С одной стороны, нередко [1, 3, 4] встречается утверждение, что поведение корреляционных функций динамических величин связано с колмогоровской энтропией h стохастического движения, определяющей скорость экспоненциального расхождения близких траекторий, так:

$$B(\tau) \simeq \exp(-h\tau). \qquad (2)$$

Предпосылки применимости (2), подробно оговоренные в работе [1, с. 41], для гамильтоновых систем типа нелинейных осцилляторов выполняются редко: обычно $B(\tau)$ осциллирует и тем качественно отличается от (2). С другой стороны, активно изучался вопрос о поведении $B(\tau)$ при $\tau \to \infty$ — законе спадания корреляций — имеющем часто степенной ($B \sim \tau^{-\nu}$) характер [5—7]. Поведение же корреляционных функций в области $\tau \lesssim \theta$ (где θ — время корреляции) изучено слабо.

Цель настоящей заметки — указать простой способ приближенного вычисления корреляционных функций динамических переменных для гамильтоновых систем, совершающих эргодическое стохастическое движение.

При эргодическом движении временные средние, входящие в определение (1), могут быть заменены средними по фазовому пространству. Пусть $W(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ — плотность вероятности для эргодической области в фазовом пространстве. Тогда, по определению, справедливо равенство

$$B_a(\tau) = \int d\mathbf{p}\, d\mathbf{q}\, W(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, b_a(\mathbf{z}, \tau), \qquad (3)$$

где $b_a(\mathbf{z}, \tau)$ — локальная корреляционная функция:

$$b_a(\mathbf{z}, \tau) = a(\tau)\, a(0) - \langle a\rangle^2; \qquad (4)$$