

Результат численного интегрирования (9) показан на рисунке вместе с результатами компьютерного расчета, в котором $B_x(\tau)$ вычислялась вдоль стохастической траектории за время $T=2 \cdot 10^4$. Погрешность в сохранении энергии ΔE не превышала $2 \cdot 10^{-3}$. Как видно, согласие является вполне удовлетворительным (особенно хорошо получается период осцилляций) и ухудшается с ростом τ , как и следовало ожидать. Заметим, что мы использовали простейшее решение (7a), уточнив которое улучшим и согласие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М., 1984.
 [2] Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М., 1988. [3] Hansel K. D. // Chem. Phys. 1978. 33, N 1. P. 35. [4] Hamilton I., Carter D., Brumer P. // J. Phys. Chem. 1982. 86, N 12. P. 2124. [5] Vivaldi F., Casati G., Guarneri I. // Phys. Rev. Lett. 1983. 51, N 9. P. 727. [6] Karney C. F. F. // Physica. 1983. D8, N 4. P. 360. [7] Бунимович Л. А. // ЖЭТФ. 1985. 89, № 4(10). С. 1452. [8] Pullen R. A., Edmonds A. R. // J. Phys. A. 1981. 14, N 12. P. L477. [9] Meyer H.-D. // J. Chem. Phys. 1986. 84, N 6. P. 3147. [10] Воробьев П. А., Заславский Г. М. // ЖЭТФ. 1987. 92, № 5. С. 1564.

Поступила в редакцию
19.12.88

РАДИОФИЗИКА

УДК 535.416.3

СЛАБОКОРРЕЛИРУЮЩИЕ ПОЛИНОМЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ АТМОСФЕРНЫХ АБЕРРАЦИЙ

К. В. Шишаков, В. И. Шмальгаузен

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Получены полиномы, ортонормированные на кольцевых областях и дающие слабокоррелированные коэффициенты разложения атмосферных аббераций с учетом внешнего масштаба турбулентности. Проведено их сравнение с полиномами Цернике.

При анализе искажений волнового фронта, прошедшего через турбулентную атмосферу, часто применяют их представление в виде ряда разложения по некоторой ортонормированной системе функций. Наиболее удобным представлением является разложение Карунена—Лоева, в котором коэффициенты разложения представляют собой некоррелированные случайные величины [1]. К сожалению, для колмогоровской модели атмосферной турбулентности функции Карунена—Лоева не могут быть записаны в явном виде, а допускают только табличное задание [2]. Поэтому для описания атмосферных аббераций на круглых и кольцевых областях широко применяются различные круговые полиномы. Так, для круглых областей часто используют полиномы Цернике [2].

Целью настоящей работы является нахождение слабокоррелирующих круговых полиномов для описания атмосферных аббераций на кольцевых областях. При этом будет применяться разложение Карунена—Лоева для приближенно заданной фазовой структурной функции в виде степенного ряда.

Функции Карунена—Лоева G_i на кольцевой области Ω определяются через решение интегрального уравнения [2]:

$$G_i(r) = K_p^q(r) e^{iq\theta}, \quad \lambda_{pq}^2 K_p^q(r) = \frac{1}{1-a^2} \int_a^1 R_q(r, \rho) K_p^q(\rho) d\rho, \quad (1)$$

$$R_q(r, \rho) = - \left(\frac{r_0}{D} \right)^{5/3} \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_\Phi(|r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos q\theta|^{1/2}) d\theta, \quad q \neq 0,$$

где j — мнимая единица; $\mathbf{r} = (r, \theta)$ — полярные координаты; λ_{pq}^2 — собственные значения; a^{-1} — отношение внешнего диаметра D области Ω к внутреннему; $R_q(r, \rho)$ — ядро уравнения (выражение для R_q при $q=0$ приведено в работе [2]); $D_\varphi(r)$ — структурная функция фазы [3]:

$$D_\varphi(r) = 2,6k^2c_n^2z \int_0^\infty \frac{1 - J_0(Drx)}{(x^2 + (2\pi/L_0)^2)^{11/6}} x dx, \quad r \in (0, 1), \quad (2)$$

L_0 — внешний масштаб турбулентности; k — волновое число; z — длина трассы; c_n^2 — структурная постоянная показателя преломления; J_0 — функция Бесселя нулевого порядка; r_0 — радиус корреляции Фрида, $1,68(c_n^2 z k^2)^{-2/5} = r_0$.

Для нахождения слабокоррелирующих функций воспользуемся следующим приближением фазовой структурной функции:

$$D'_\varphi(r) = \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} \sum_{i=1}^M a_i r^{2i}, \quad M = 4, \quad (3)$$

позволяющим непосредственно вычислить все интегралы, входящие в (1). Здесь M — количество членов разложения; a_i — коэффициенты, определяемые из условия минимизации квадратичной ошибки аппроксимации функции D_φ функцией D'_φ на круге единичного радиуса. При $2\pi D/L_0 = \alpha \leq 1$ отношение такой ошибки к среднему по области значению квадрата функции (2) заключалось в интервале $2 \cdot 10^{-5} - 3 \cdot 10^{-4}$, а при $\alpha > 1$ быстро росло. Решением уравнений (1) для D'_φ являются круговые полиномы вида

$$G_i = \text{const}, \quad G_i = \sum_{k=1}^4 C_{ki} r^{m+2k} e^{im\theta}, \quad i = 2, \dots, 10, \quad (4)$$

где m — целое число; C_{ki} — постоянные коэффициенты, зависящие от α и i .

G_i ($\epsilon = 0$)	m	a	C_{1i}	C_{2i}	C_{3i}	C_{4i}	Λ_i
2,3	1	0,5	2,010	-0,448	0,234	-0,074	0,452
		0,75	1,771	-0,307	0,171	-0,068	0,456
4	0	0,5	-4,453	11,642	-8,949	3,288	0,0078
5,6	2	0,5	4,457	-4,273	1,451		0,028
		0,75	4,018	-3,948	1,451		0,029
7,8	1	0,5	9,310	-19,692	8,169	0,202	0,0046
9,10	3	0,5	4,660	-2,801			0,0086
		0,75	4,057	-2,511			0,0100

В таблице приведены некоторые из полиномов G_i , удовлетворяющие условию нормировки:

$$\frac{1}{\pi D^2 (1 - a^2)} \int_{\Omega} G_i^2(r) d^2r = 1.$$

Величины Λ_i равны отношению значений λ_i^2 к квадратичной ошибке волнового фронта (ϵ) [2], вычисленной для D'_φ . На рис. 1 показаны функции $\bar{K}_p^q(r) = K_p^q(r) - K_p^q(a) - (K_p^q(1) - K_p^q(a))r/(1-a)$, в которых K_p^q определяются в соответствии с таблицей. Зависимости дисперсий коэффициентов разложения b_i искажений волнового

фронта по полиномам G_i от величины a приведены на рис. 2. Отметим, что для круглой области $\Omega(a=0)$ функции G_i оказались очень близки к функциям Карунена—Лоева [2].

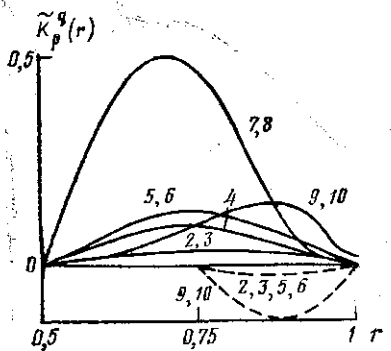


Рис. 1. Функции $\tilde{K}_p^g(r)$ при $a=0,5$ (сплошные кривые) и $-\tilde{K}_p^g(r)$ при $a=0,75$ (штриховые). Номера кривых i соответствуют функциям $G_i(r) = K_p^g(r)e^{i\theta}$

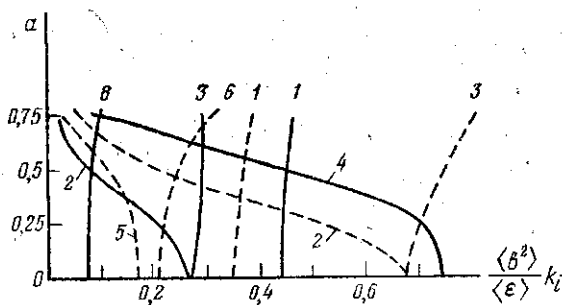


Рис. 2. Зависимость $\langle b_i^2 \rangle / \langle \epsilon \rangle$ от a при $a=0$ (сплошные кривые) и 1 (штриховые): 1 — $G_{2,3}$, $k_{2,3}=1$; 2 — G_4 , $k_4=10$; 3 — $G_{5,6}$, $k_{5,6}=10$; 4 — $G_{7,8}$, $k_{7,8}=100$; 5 — $G_{7,8}$, $k_{7,8}=10$; 6 — $G_{9,10}$, $k_{9,10}=10$

Проведем сравнение полученных полиномов с полиномами Цернике [4]. Чтобы сохранить ортогональность полиномов Цернике на кольцевой области и среднее по области нулевое значение, преобразуем их следующим образом [4]:

$$Z'_4 = Z_4 - \sqrt{3} a^2, \quad Z'_{7,8} = Z_{7,8} - \frac{2\sqrt{8} a^4}{1+a^2} r e^{i\theta}, \quad Z'_i = Z_i, \quad i=2, 3, 5, 6, 9, 10. \quad (5)$$

Для сравнения таких полиномов с полученными ранее (4) были вычислены δ_{ki} — отношения величин $\langle b_k b_i \rangle$ для полиномов (4) к аналогичным величинам для полиномов (5). Вычисления проводились в соответствии с формулами работы [2]. Без учета внешнего масштаба турбулентности ($a=0$) для структурной функции (2) величины δ_{kk} получились близкими, а корреляции между 2-м и 8-м (3-м и 7-м) полиномами существенно уменьшились и составили для $a=0$: $\delta_{37} = \delta_{28} = -0,15$; $a=0,5$: $\delta_{37} = \delta_{28} = -0,09$. Отношения остаточной ошибки аппроксимации волнового фронта полиномами Z'_i ($i=2, \dots, 10$) к такой же ошибке для полиномов G_i были равны 1,11 ($a=0$); 1,09 ($a=0,5$). Подобные отношения были вычислены при $a=1$ для структурной функции (3). В этом случае на круглой области ($a=0$) такое же отношение было равно примерно трем. В заключение отметим, что основным недостатком полиномов Цернике является сильная корреляция 2-го с 8-м и 3-го с 7-м, причем $\langle b_2 b_8 \rangle$ превышает при $a=0$ более чем в два раза вклад $\langle b_7^2 \rangle$ 7-го или 8-го полиномов в ошибку волнового фронта. Полиномы (4) такую связь существенно ослабляют. Так, для них при $a=0$ она оказывается примерно в три ($a=0$) и в четыре ($a=0,5$) раза меньше вклада 7-го или 8-го полинома.

Таким образом, полиномы, полученные на основе аппроксимации (3), выгодно отличаются от полиномов Цернике меньшей коррелированностью на круглых и кольцевых областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1977. [2] Wang J., Markey J./J. Opt. Soc. Am. 1978. 68, N 1. P. 78. [3] Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967. [4] Wang J. Y., Silva D. E. // Appl. Opt. 1980. 19, N 9. P. 1510.

Поступила в редакцию
01.11.88