

тому, для построения модели, в которой существовал бы фазовый переход кварк-глюонная плазма—адроны, необходимо ввести межкварковое взаимодействие. Моделирование потенциала межкваркового взаимодействия, который учитывал бы зависимость от глюонного конденсата, температуры, химического потенциала и т. д., является весьма сложной задачей, не решенной в настоящее время. Несколько иной способ, позволяющий продемонстрировать наличие такого фазового перехода, основан на модели мешков и довольно подробно обсуждался в литературе [1].

Аналогичные вычисления были проделаны для симметрично выбранных неабелевых потенциалов A_a^μ :

$$A_1^\mu = (0, \sqrt{\lambda}, 0, 0), \quad A_2^\mu = (0, 0, \sqrt{\lambda}, 0), \quad A_3^\mu = (0, 0, 0, \sqrt{\lambda}).$$

Результаты расчетов также представляют собой систему подобных поверхностей, которые не имеют особенностей. Из этих результатов так же, как и в предыдущем случае, можно сделать вывод об отсутствии фазового перехода.

Авторы благодарят В. К. Перес-Фернандеса за помощь в проведении численных расчетов, а также В. Ч. Жуковского и А. В. Борисова за полезные обсуждения данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Горенштейн М. И., Зиновьев Г. М., Шелест В. П. // Адронная материя в экстремальных условиях. Киев, 1986. Ч. 1. [2] Bernard C. W. // Phys. Rev. D9. P. 3312; Dolan L., Jackiw R. // Ibid. P. 3320. [3] Kislinger M. B., Mogley P. D. // Phys. Rev. 1976. D13. P. 2765. [4] Вшивцев А. С., Татаринцев А. В. // Укр. физ. журн. 1988. 33. С. 165; Агаев Ш. С., Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч. и др. Деп. ВИНТИ № 8022-84 от 17.12.84. М., 1984. [5] Барров В. Г., Вшивцев А. С., Перес-Фернандес В. К., Николаев А. В. Препринт Томского филиала СО АН СССР № 8. Томск, 1988. [6] Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Мидодашвили П. Г., Татаринцев А. В. // Изв. вузов. Физика. 1986. № 5. С. 47. [7] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983. [8] Actor A. // Proc. 16th GIFT Int. Semin. Theor. Phys., Japa, June 3—8, 1985. Singapore, 1986.

Поступила в редакцию
23.06.88

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 5

УДК 533.9

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ТОКА В КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. А. Быков, В. Ю. Попов, А. Г. Свешников, С. А. Якунин

(кафедра математики)

Рассматривается двумерная самосогласованная нелинейная задача о течении тока в плазме с учетом собственного магнитного поля. Приводятся описание вычислительного алгоритма и результаты численного эксперимента, в котором получен эффект, отсутствующий в одномерной задаче.

В сильноточных ускорителях плазмы, где генерируется магнитное поле большой величины (см. [1]), а также в ускорительных системах, где плазма имеет высокую проводимость (см. [2]), собственное магнитное поле тока электронной компоненты может заметно влиять на

распределение тока в объеме плазмы. Известны результаты расчета распределения электронного тока в плазме с учетом его собственного магнитного поля в случае одномерной задачи [3]. В настоящей работе решается двумерная задача, при этом наблюдается эффект, который отсутствует в одномерном варианте.

Рассмотрим допущения, позволяющие поставить задачу, которую можно решать численно с применением ЭВМ. Предположим, что начиная с некоторого момента времени в объеме плазмы за счет внешних источников создано электрическое поле достаточно большой величины. В плазме будут происходить процессы установления электромагнитного равновесия (сопровождающегося электромагнитным излучением), установления квазинейтральности (за счет перемещения электронов и уравнивания концентраций электронов и ионов), диффузии магнитного поля в объем плазмы (сопровождающейся установлением распределения электронного тока по объему), установления функции распределения ионов и функции распределения электронов по энергиям. Эти процессы сопровождаются развитием неустойчивостей различных типов. Как правило, характерные времена каждого из этих процессов по порядку величины значительно отличаются, что позволяет строить ряд упрощенных моделей, описывающих поведение плазмы в разных временных масштабах.

Предположим, что в силу физических условий задачи время диффузии магнитного поля в объем плазмы много меньше времени установления стационарной концентрации ионов и много больше времени установления квазинейтральности, электромагнитного равновесия и функции распределения электронов. Рассмотрим плазму по прошествии времени диффузии магнитного поля. Концентрацию ионов $n_i(\mathbf{r}, t)$ в момент времени t можно считать заданной, концентрация электронов $n_e(\mathbf{r}, t) \cong n_i(\mathbf{r}, t)$. Для определения средней скорости коллективного дрейфа электронов $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и плотности электронного тока $\mathbf{J} = -en_e\mathbf{v}$ необходимо помимо $n_i(\mathbf{r}, t)$ задать еще распределение электрического потенциала Φ на границе области, а магнитное поле \mathbf{H} и электронную проводимость плазмы σ — во всем объеме плазмы в тот же момент времени t .

Самосогласованная нелинейная задача о течении тока в плазме с учетом собственного магнитного поля получится, если считать, что магнитное поле \mathbf{H} создано токами электронной и ионной компонент. Рассмотрим условия, при которых необходим учет собственного магнитного поля. Пусть L — характерный размер области, занятой плазмой, U — величина внешней разности потенциалов. Тогда плотность тока J по порядку величины равна

$$J = \sigma U / L,$$

а максимальная величина собственного магнитного поля

$$H_{\max} \cong (4\pi/c) J L = (4\pi/c) \sigma U.$$

Если ω — ларморовская частота электронов, τ — среднее время между электрон-ионными столкновениями, то безразмерная величина $\mu = \omega\tau$, называемая замагниченностью плазмы (см., напр., [4]), имеет максимальное значение

$$\mu_{\max} \equiv \left(\frac{\sigma H}{enc} \right)_{\max} \cong \frac{4\pi\sigma^2 U}{enc^2}. \quad (1)$$

Учет собственного магнитного поля необходим, если $\mu_{\max} \gg 1$ или, что

то же самое, средняя величина силы Лоренца, действующей на электроны, участвующие в дрейфовом движении, и рассчитанной через среднюю дрейфовую скорость, больше средней силы, действующей со стороны электрического поля. В этом случае собственное магнитное поле приводит к перераспределению тока в объеме плазмы. Из (1) видно, что это имеет место или для случая большой приложенной разности потенциалов U , или для плазмы с большим отношением σ^2/n (т. е. фактически с малой концентрацией, так как в широком диапазоне параметров σ не зависит от n [4]).

В дальнейшем рассматриваем коаксиальную плазменную систему, применяемую в сильноточных ускорителях [1] (рис. 1). Плазма занимает область между двумя коаксиальными металлическими цилиндрами $r=r_1$ и $r=r_2$, причем концентрация n в области $r_1 < r < r_2$, $0 < z < L$ задана и $n(r, z) = 0$ при $z < 0$ или $z > L$. На внутреннем цилиндре поддерживается потенциал U_1 , на внешнем — потенциал U_2 ($U_1 > U_2$), и внешний источник, создающий разность потенциалов, находится справа (см. рис. 1). Эффекты, связанные с наличием скачков потенциала вблизи электродов, не рассматриваем. Для расчета потенциала $\Phi(r, t)$ используем обобщенный закон Ома, записанный с учетом эффекта Холла:

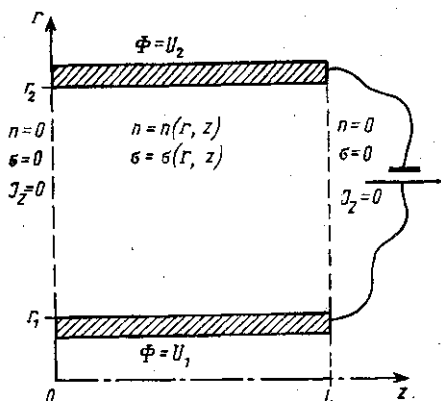


Рис. 1

$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{v}, \mathbf{H}])$, находящаяся справа (см. рис. 1). Эффекты, связанные с наличием скачков потенциала вблизи электродов, не рассматриваем. Для расчета потенциала $\Phi(r, t)$ используем обобщенный закон Ома, записанный с учетом эффекта Холла:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{v}, \mathbf{H}]). \quad (2)$$

В уравнении непрерывности электронного тока пренебрежем членом $\partial \rho / \partial t$ (где $\rho = -en$), считая изменение плотности заряда медленным:

$$\text{div } \mathbf{J} = 0. \quad (3)$$

Электрическое поле \mathbf{E} считаем потенциальным:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi. \quad (4)$$

Граничные условия для потенциала на линиях $r=r_1$ и $r=r_2$ зададим в виде

$$\Phi(r_1, z) = U_1, \quad \Phi(r_2, z) = U_2, \quad 0 < z < L. \quad (5)$$

На линиях $z=0$ и $z=L$ зададим условия непротекания тока: $J_z(r, 0) = 0$ и $J_z(r, L) = 0$. Покажем, что условия непротекания тока приводят к задаче с кривой производной для потенциала. Из (2) и (4) получим выражение для тока:

$$\mathbf{J} = \frac{\vec{\mathcal{E}} + [\vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{E}}] + \vec{\mathcal{H}}(\vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{E}})}{1 + \mathcal{H}^2}, \quad (6)$$

где $\vec{\mathcal{E}} = \sigma \mathbf{E}$, $\vec{\mathcal{H}} = \sigma \mathbf{H} / (enc)$, откуда $J_z = -S_{rz} \partial \Phi / \partial r - S_{zz} \partial \Phi / \partial z$, $S_{rz} = \sigma(\mathcal{H}_r \mathcal{H}_z + \mathcal{H}_\phi) / (1 + \mathcal{H}^2)$, $S_{zz} = \sigma(1 + \mathcal{H}_z^2) / (1 + \mathcal{H}^2)$.

Таким образом, условия на линиях $z=0$ и $z=L$ имеют вид

$$S_{zr} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + S_{zz} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Из (3), (6) получим одно уравнение эллиптического типа второго порядка для потенциала в плазме:

$$\operatorname{div} \left\{ \frac{\sigma}{1 + \mathcal{H}^2} (\nabla \Phi - [\nabla \Phi, \vec{\mathcal{H}}] + \vec{\mathcal{H}} (\nabla \Phi, \vec{\mathcal{H}})) \right\} = 0. \quad (8)$$

Магнитное поле определяем из уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{J} \quad (9)$$

с дополнительным граничным условием

$$\mathbf{H}|_{z=0} = 0, \quad (10)$$

которое соответствует отсутствию поля вне контура с током, включающего источник, оба коаксиальных цилиндра и плазменный промежуток.

Задача (1)–(10) в целом является нелинейной, для численного решения применяем итерационный процесс. Каждый шаг итерационного процесса состоит из двух этапов. На первом этапе решается линейная краевая задача для электрического потенциала, причем магнитное поле берется с предыдущего шага:

$$\operatorname{div} \left\{ \frac{\sigma}{1 + \mathcal{H}_{k-1}^2} (\nabla \Phi_k - [\nabla \Phi_k, \vec{\mathcal{H}}_{k-1}] + \vec{\mathcal{H}}_{k-1} (\nabla \Phi_k, \vec{\mathcal{H}}_{k-1})) \right\} = 0,$$

$$\vec{\mathcal{H}}_k = \frac{\sigma \mathbf{H}_k}{enc}, \quad \Phi_k(r_1, z) = U_1, \quad \Phi_k(r_2, z) = U_2,$$

$$S_{rz} (\vec{\mathcal{H}}_{k-1}) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + S_{zz} (\vec{\mathcal{H}}_{k-1}) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0, L} = 0,$$

номер итерации k принимает значения $1, 2, 3, \dots$

На втором этапе вычисляется магнитное поле, создаваемое током \mathbf{J}_k , который вычисляется из (6) при подстановке $\vec{\mathcal{H}}_{k-1}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_k = (4\pi/c) \mathbf{J}_k.$$

На первом шаге полагаем $\mathbf{H}_0 = 0$. Итерационный процесс прекращается, когда $\|\Phi_{k+1} - \Phi_k\| < \varepsilon$, где ε — заданная погрешность, $\|\Phi\| = \max |\Phi|$. Как показал вычислительный эксперимент, имеет место достаточно быстрая сходимость итерационного процесса.

Полностью консервативные разностные схемы для уравнений (8), (9) с граничными условиями (5), (7), (10) строятся на девятиточечных шаблонах аналогично работе [5]. На дискретном уровне выполняются аналоги законов сохранения тока и энергии, которые имеют место для задачи в дифференциальной постановке. Разностные уравнения решаются прямым методом типа матричной прогонки [6], который обеспечивает устойчивость по отношению к ошибкам округления ЭВМ.

Результаты численного эксперимента представлены на рис. 2 и 3, сплошные линии — линии равного потенциала, штриховые — линии электронного тока, которые одновременно являются линиями равной величины компоненты магнитного поля \mathcal{H}_φ (остальные компоненты $\mathcal{H}_r = 0$ и $\mathcal{H}_z = 0$). Параметры задачи выбраны так, что максимальная замагниченность $(\omega t)_{\max} \cong 50$. На обоих рисунках $\sigma(r, z) = \text{const}$, на

рис. 2 $n(r, z) = \text{const}$ и область $r_1 < r < r_2$, $0 < z < L$ — квадрат на плоскости (r, z) . На рис. 3 эта область — прямоугольник с соотношением сторон 1:2, концентрация — линейная функция z и не зависит от r : $n = [n_1(L-z) + n_2z]/L$, причем $n_1/n_2 = 0,1$. Рис. 2 соответствует начальной стадии протекания тока через плазменный промежуток, а рис. 3 — разлету плазмы, когда при $z=0$ ее концентрация уменьшилась в 10 раз. Характерная особенность обоих случаев состоит в том, что ток концентрируется вблизи правого верхнего и левого нижнего углов об-

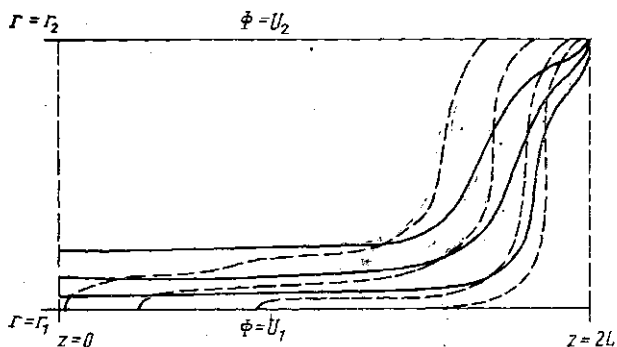


Рис. 2

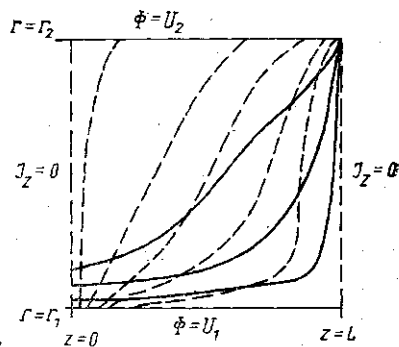


Рис. 3

ласти (см. рис. 2 и 3). При этом большая часть электронов стекает с малой части внешнего электрода, прилегающей к источнику, пересекает плазменную область по диагонали и попадает на внутренний электрод в области, наиболее удаленной от источника. Распределение тока и магнитного поля согласовано с распределением потенциала, которое обеспечивает увеличение напряженности E в правом верхнем и левом нижнем углах. Вблизи двух других углов образуются обширные застойные области с малой плотностью тока. Качественно этот эффект соответствует приведенному в [7], где рассматривается несколько иная модель, относящаяся к развитию неустойчивости z -пинча.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Быстрицкий В. М., Диденко А. Н. Мощные ионные пучки. М., 1984.
 [2] Морозов А. И. Физические основы космических электрореактивных двигателей. М., 1978. [3] Кингсеп А. С., Чукбар К. В., Янчков В. В. // Вопросы теории плазмы. М., 1987. Вып. 16. С. 209. [4] Франк-Каменецкий Д. А. Основы физики плазмы. М., 1978. [5] Свешников А. Г., Якунин С. А. // ЖВМ и МФ. 1983. 23, № 5. С. 1141. [6] Быков А. А. // ДАН СССР. 1986. 288. С. 521. [7] Вихорев В. В., Брагинский С. И. // Вопросы теории плазмы. М., 1980. Вып. 10. С. 243.

Поступила в редакцию
28.06.88