АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 534.26

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СФЕРИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ

Н. Н. Макарченко, Ф. В. Рожин, О. С. Тонаканов

(кафедра акустики)

С использованием точного решения задачи дифракции на жидкой сферической линзе исследованы поля звукового давления и интенсивности во внутренней области линзы с $20 \leqslant kr_0 \leqslant 80$ в зависимости от показателя преломления, затухания и отношения волновых сопротивлений материалов линзы и среды.

Для формирования диаграмм направленности в жидкой и газообразной средах используются фокусирующие системы, например сферическая линзовая антенна. Для анализа ее характеристик в промежуточном частотном диапазоне (когда размер препятствия порядка нескольких десятков длин волн) необходимо использовать точное решение соответствующей дифракционной задачи. С использованием решения в виде разложения поля по сферическим функциям в работах [1—4] были исследованы распределения звукового давления при различных параметрах задачи. В данной работе исследуется вопрос об оптимальных параметрах жидкой сферической линзы.

При падении на однородный шар радиуса r_0, расположенный в центре сферической системы координат (r, θ, φ), плоской звуковой волны давления единичной амплитуды $p_i = \exp(ikz)$ вдоль оси $0z$ в предположении временной зависимости $\exp(-i\omega t)$ поле во внешней области

$$p = p_i + \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) A_n h_n (kr) P_n (\cos\theta),$$

во внутренней области

$$\bar{p} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \bar{A}_n \bar{j}_n (\bar{k}r) P_n (\cos\theta),$$

составляющие относительной (нормированной по отношению к скорости падающей волны) колебательной скорости во внутренней области

$$\bar{v}_r/v_i = -(\partial\bar{p}/\partial r)(\rho c/i\omega\bar{\rho}) = (i/R_c) \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \bar{j}_n' (\bar{k}r) P_n (\cos\theta),$$

$$\bar{v}_\theta/v_i = -(\partial\bar{p}/\partial\theta)(\rho c/i\omega\bar{\rho} r) = (i/R_c \bar{k} r) \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \bar{j}_n (\bar{k}r) (dP_n/d\theta).$$

Относительная интенсивность звука (модуль вектора относительной интенсивности) в любой точке внутри линзы [2]

$$\bar{I} = (\bar{I}_r^2 + \bar{I}_\theta^2)^{1/2},$$

где

$$\bar{I}_r = \mathrm{Re}(\bar{p}\bar{v}_r^*)/2I_i, \quad \bar{I}_\theta = \mathrm{Re}(\bar{p}\bar{v}_\theta^*)/2I_i,$$

$$I_i = (1/2)\rho c,$$

причем $\bar{I}_\theta = 0$ для точек на оси линзы ($\theta=0, \pi$), так как $dP_n(\cos\theta)/d\theta = 0$ при $\theta = 0, \pi$.

Обозначения: $j_n(x)$ — сферические функции Бесселя, $h_n(x)$ — сферические функции Ханкеля первого рода, штрих означает производную по соответствующему аргументу, * — знак комплексного сопряжения, $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, A_n, $\bar{A}_n$ — коэффициенты разложения, определяемые из граничных условий непрерывности нормальных составляющих скоростей и давлений на границе, $x = kr_0$, $k = \omega/c$, $\bar{k} = \omega/\bar{c}$; $\bar{k} = \bar{k}_1 + i\bar{k}_2$ считаем в общем случае комплексным, учитывая тем самым поглощение в материале линзы, $R_c = \bar{\rho}\bar{c}/\rho c$, $\bar{\rho}$, $\bar{c}$, ρ, c — плотности и скорости звука во внутренней и внешней жидкостях соответственно.

Решение, а следовательно, и характеристики линзы зависят от следующих параметров: kr_0 — волнового числа линзы; $N_c = \bar{k}/k$ — комплексного показателя преломления; R_c — отношения волновых сопротивлений материала сферы и среды; kr, $\bar{k}r$, θ — координат точки, в которой рассматривается поле. N_c и R_c — комплексные при $\bar{k}_2 \neq 0$: $N_c = N + i\alpha/2\pi$, $R_c = R(1 + i\alpha/2\pi N)$, где $N = \bar{k}_1/k = \lambda/\bar{\lambda}$ характеризует отношение длины волны в среде λ и в материале линзы $\bar{\lambda} = 2\pi/\bar{k}_1$; $\alpha = 2\pi\bar{k}_2/k$ [Нп] — поглощение на расстоянии, равном λ; $R = \bar{\rho}N/\rho(N^2 + \alpha^2/4\pi^2)$.

Исследуемый диапазон изменения параметров:

$$20 \leqslant kr_0 \leqslant 80,\ 1 \leqslant N \leqslant 2,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,\ \alpha \text{ — в дБ}/\lambda,\ 0 \leqslant \bar{\rho}/\rho \leqslant 10,\ r \leqslant 2r_0,$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Результаты расчетов. На рис. 1 приведены радиальные распределения относительной интенсивности $\bar{I}$ и звукового давления $\bar{p}$ во внутренней области на оси ($\theta=0$) для линз с указанными параметрами. На оси можно выделить фокальную область, в которой давление существенно больше давления в падающей волне и осциллирует. Распределения $\bar{I}$ более плавные, чем $\bar{p}$. Под положением фокуса будем понимать положение максимума огибающей кривой распределения давления (интенсивности). Фокусы $\bar{I}$ и $\bar{p}$ не совпадают в общем случае, что согласуется с [1, 2]. При увеличении N фокальная область смещается к центру линзы.

Примеры резонансных и нерезонансных угловых распределений давления на поверхности линзы (диаграмм направленности точечного ненаправленного приемника, расположенного на ее поверхности) приведены в [4]. С ростом x (вне резонансов) полуширина главного лепестка диаграммы направленности ($\Delta_{0,7}$) сужается и уменьшается отношение амплитуды главного лепестка к максимальному из боковых (δ) (рис. 2), что согласуется с [5]. Расчеты показывают, что $\Delta_{0,7}$, δ и положение фокуса r_f/r_0 существенно не меняются при увеличении затухания по крайней мере до 0,6 дБ/λ.

В [5] указывается на существование значения x, при котором коэффициент усиления для давления K (отношение давления в фокусе линзы к давлению в падающей волне) достигает максимума. Это связано с тем, что с ростом x, с одной стороны, растет апертура линзы, а с другой — возрастает фазовая аберрация, влияние этих факторов на K

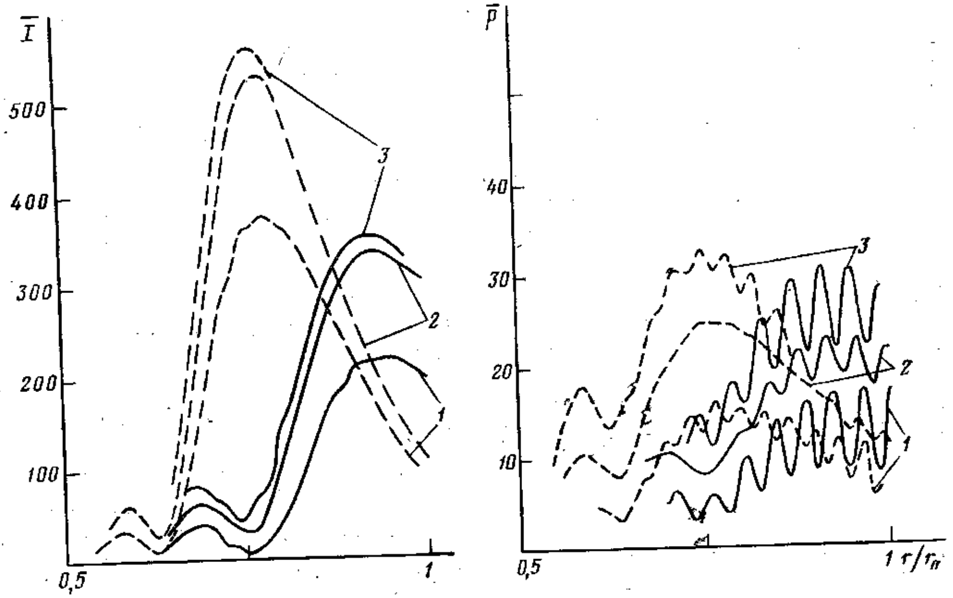

Рис. 1. Распределения интенсивности и звукового давления внутри линзы на оси ($\theta=0$): $x=50$, $\bar{k}_2 r_0=0,2$, $\rho/\rho=1$ (*1*), 2 (*2*), 3 (*3*) при $N=1,8$ (сплошная линия) и 2 (штриховая)

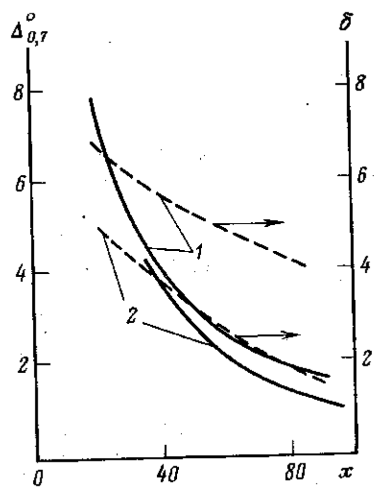

Рис. 2. Зависимости $\Delta_{0,7}$ и δ от x для линз с $\bar{\rho}=\rho$, $\alpha=0,54$ дБ/λ: $N=1,8$ (*1*) и 1,7 (*2*)

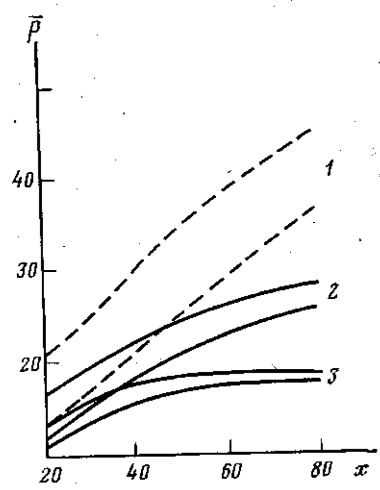

Рис. 3. Зависимости звукового давления в точке на оси ($\theta=0$) от x для линзы с $\alpha=0,1$ дБ/λ (*1*), 0,15 дБ/λ (*2*), 0,3 дБ/λ (*3*); $R=1$; $N=1,8$; $r=r_0$

противоположно. Для линзы с $N=1{,}7$ K должен достигать максимума при $x \approx 30$, как следует из анализа характеристик методом Дебая [5].

Проведенный нами анализ зависимостей давления в точках фокальной области от x показывает, что в отсутствие затухания имеются существенные осцилляции давления на фоне среднего уровня, связанные с резонансами. На рис. 3 цифрами *1*, *2*, *3* обозначены области, каждая из которых ограничена двумя кривыми, определяющими верхний и нижний уровни осцилляций давления на поверхности линзы (в фокальной области) при $N=1{,}8$ и равенстве волновых сопротивлений среды и материала линзы.

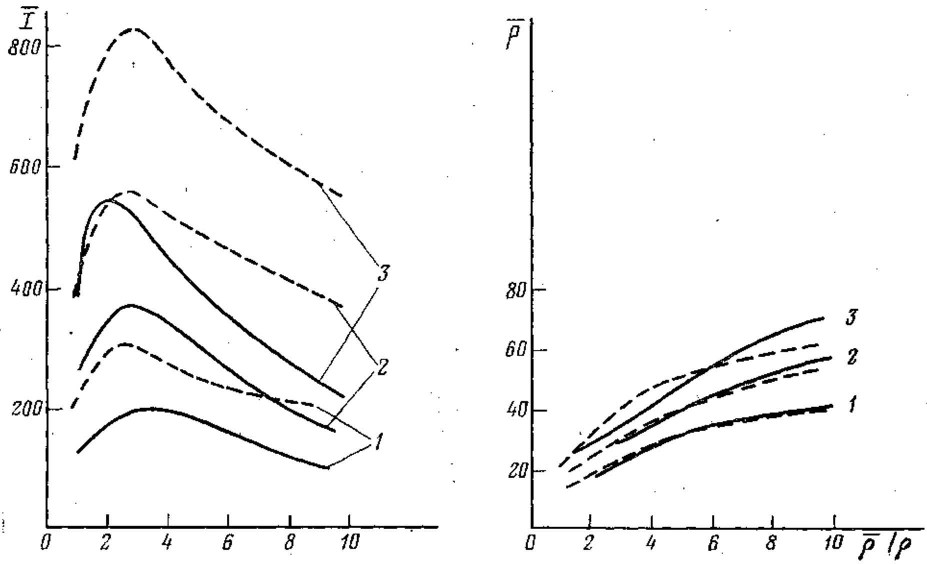

Рис. 4. Зависимости интенсивности и звукового давления на оси ($\theta=0$) от R ($\bar{\rho}/\rho$) для линзы с $\bar{k}_2 r_0=0{,}2$, $N=1{,}8$ (сплошная линия): $x=30$, $r_f=0{,}84r_0$ (*1*); $x=50$, $r_f=0{,}9r_0$ (*2*); $x=70$, $r_f=0{,}95r_0$ (*3*) и $N=2$ (штриховая линия): $x=30$, $r_f=0{,}7r_0$ (*1*); $x=50$, $r_f=0{,}75r_0$ (*2*); $x=70$, $r_f=0{,}77r_0$ (*3*)

Амплитуда этих осцилляций и средний уровень давления уменьшаются с ростом затухания. Средний уровень давления для $N=1{,}7$ и 1,8 монотонно растет с ростом x, и максимума при $x \approx 30$ нет. Таким образом, точное решение дает результаты, отличающиеся от данных, полученных с использованием приближенного метода Дебая (в принципе не описывающего резонансы линзы).

Наряду со случаем $\alpha=\text{const}$ (затухание линейно растет с частотой) исследовались зависимости давления от x для затухания, растущего как квадрат частоты ($\alpha=0{,}1x/20$ дБ/λ). Для этого случая K имеет максимум при $30 \leqslant x \leqslant 80$.

Относительно выбора оптимального N отметим, что K для линзы с $N=2$ не меньше, чем с $N=1{,}8$, но фокус для $N=1{,}8$ расположен ближе к поверхности линзы, что предпочтительнее для практического использования.

Представляет интерес вопрос о выборе оптимального значения R. Как известно [6], при нормальном падении плоской волны на плоскую границу двух полупространств $R_{\text{опт}}=1$, при этом интенсивность падающей волны равна интенсивности прошедшей. В предельных случаях при

$R\to\infty$ $\bar p\to 2$, $\bar v\to 0$, $\bar I\to 0$, а при $R\to 0$ $\bar p\to 0$, $\bar v\to 2$, $\bar I\to 0$. При наклонном падении $R_{\text{опт}}$ зависит от угла падения θ и N. $R_{\text{опт}}$ растет от 1 до ∞ при изменении θ от 0 до 90°. Так как при достаточно больших x можно говорить о лучах, падающих на сферу под различными углами $0°\leqslant\theta\leqslant 90°$, то результат $R_{\text{опт}}=1$ (как предполагается в [5]) не является очевидным.

Примеры зависимостей $\bar I$ и $\bar p$ в фокусе давления от R для линзы приведены на рис. 4. Для всех кривых $\bar k_2 r_0=0{,}2$, что соответствует постоянному затуханию на диаметре линзы. Видно, что с ростом R (за счет $\bar\rho/\rho$) $\bar p$ монотонно растет и стремится при $R\to\infty$ к некоторому предельному значению $\bar p_\infty$, а $\bar I$ достигает максимума при $R\sim 1$—2 (в зависимости от x и N). Вне резонансов колебательная скорость стремится к нулю при $R\to\infty$. Это следует из решения

$$A_n\big|_{R_c\to\infty}=\frac{j_n\bar j_n'-R_c j_n'\bar j_n}{R_c h_n'\bar j_n-h_n\bar j_n'}\Bigg|_{R_c\to\infty}=-\frac{j_n'}{h_n'},$$

$$\bar A_n\big|_{R_c\to\infty}=\frac{iR_c}{x^2(R_c h_n'\bar j_n-h_n\bar j_n')}\Bigg|_{R_c\to\infty}=\frac{i}{x^2\bar j_n h_n'},$$

где аргументом функций j_n, j_n', h_n, h_n' является kr_0, а $\bar j_n$, $\bar j_n'$ — $\bar k r_0$,

$$\bar p\big|_{R_c\to\infty}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}(2n+1)\bar j_n(\bar k r)}{x^2 h_n'(kr_0)\bar j_n(\bar k r_0)}P_n(\cos\theta)=\bar p_\infty,$$

$$\frac{\bar v_r}{v_i}\bigg|_{R_c\to\infty}=\frac{1}{R_c x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+2}(2n+1)\bar j_n'(\bar k r)}{h_n'(kr_0)\bar j_n(\bar k r_0)}P_n(\cos\theta)\bigg|_{R_c\to\infty}=0.$$

Поле во внешней области при $R\to\infty$ вне резонансов совпадает с полем рассеяния акустически жесткой сферы, вблизи резонансов $\bar p\sim O(R)$ и $\bar v/v_i\sim O(1)$ [7, 8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Boyles C. A.//J. Acoust. Soc. Am. 1965. **37**, N 3. P. 393. [2] Boyles C. A.// //Ibid. 1977. **61**, N 2. P. 338. [3] Макарченко Н. Н., Рожин Ф. В., Тонаканов О. С.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1980. **21**, № 6. С. 97. [4] Макарченко Н. Н., Рожин Ф. В., Тонаканов О. С.//Там же. 1981. **22**, № 4. С. 89. [5] Каневский И. Н. Фокусировка звуковых и ультразвуковых волн. М., 1977. С. 227—267. [6] Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. М., 1960. [7] Gaunard G. C., Tanglis E., Überall H., Brill D.//Nuovo Cim. 1983. **B76**, N 2. P. 153. [8] Kriegsmann G. A., Norris A. N., Reiss E. L.//Wave Motion. 1984. **6**, N 5. P. 501.

Поступила в редакцию
02.06.88