УДК 534.222

ЛУЧЕВАЯ ТЕОРИЯ КЛИНОВЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

В. Г. Можаев

(кафедра акустики)

В лучевом приближении на основе анализа распространения волн Лэмба в клиновидных пластинах получено аналитическое выражение для скорости клиновых волн как функции материальных параметров и угла острого клина.

Клиновые акустические волны (волны, распространяющиеся вдоль и локализованные вблизи ребра упругого твердого клина) предсказаны и обнаружены в 1972 г. [1—3] и теоретически исследовались в основном численными методами [4, 5]. Приближенные аналитические подходы к задаче распространения клиновых волн развивались в работах [6, 7], однако полученные в них соотношения совпадают с точным численным решением лишь в области предельно малых углов клина. Цель настоящей работы — показать, что применение к данной задаче хорошо известного в теории волн лучевого метода дает возможность получить простое и достаточно точное аналитическое выражение для фазовой скорости клиновых волн как функции угла и материальных параметров клина. Полученное выражение применимо и к ранее не исследовавшемуся случаю, когда поверхности, образующие клин, не являются плоскими.

Будем считать, что угол клина θ достаточно мал, так что волновое поле в сечении острого клина можно аппроксимировать полем в плоскопараллельной пластине с толщиной h, соответствующей локальной толщине клина. В лучевом приближении волновое поле в неоднородной среде, аналогом которой для волн в пластине (волн Лэмба) является острый клин, можно представить как интерференцию двух локально-плоских волн (рис. 1). Эти волны распространяются в общем случае наклонно по отношению к направлению переноса энергии (в данном случае оси z) с фазовой скоростью, равной скорости волн в однородной среде, свойства которой совпадают с локальными свойствами неоднородной среды. Таким образом, волновое поле на некотором расстоянии r от ребра клина можно представить в виде

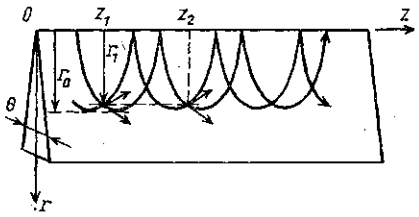

Рис. 1. Лучевые траектории изгибных волн в остром клине

$$u(r,\ z)=A_+\exp(ik_rr+ik_zz)+A_-\exp(-ik_rr+ik_zz). \qquad (1)$$

Здесь временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен, $A_\pm$ — амплитудные коэффициенты; k_r, k_z — проекции волнового вектора на соответствующие оси координат. С другой стороны, при движении по лучевым траекториям из точки $(r_1,\ z_1)$ в точку $(r_1,\ z_2)$ эти волны приобретают дополнительный набег фазы

$$u(r_1,\ z_2)=[A_+\exp(ik_rr_1)+A_-\exp(-ik_rr_1)]\exp\left(i\int_l ik_rdr+\Delta\Phi+ik_zz_2\right), \qquad (2)$$

где интегрирование ведется по лучевым траекториям, а $\Delta\Phi$ — дополнительный сдвиг фазы на каустиках. Поскольку представление (1) должно выполняться как в точке (r_1, z_1), так и в точке (r_1, z_2), сшивая (1) и (2) в точке (r_1, z_2), получаем следующее ограничение на дополнительный набег фазы вдоль лучевой траектории:

$$\int_l k_r dr + \Delta\Phi = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Сдвиг фазы $\Delta\Phi$ складывается из сдвига фазы в точке поворота r_0, равного, как известно [8], $-\pi/2$, и сдвига фазы $\Delta\Phi_R$ при отражении лучей от ребра клина. Значение $\Delta\Phi_R$ найдем, используя теорию изгибных волн в тонких пластинах. Для этого учтем, что угол падения луча на ребро клина равен нулю вследствие обращения в нуль на ребре локальной скорости изгибных волн. Уравнение, описывающее изгибные волны, падающие по нормали на ребро острого клина, следует из общего уравнения изгибных колебаний тонких пластин переменной толщины [9], и оно может быть записано в виде

$$r^{-1}(r^3 w'')'' - a^2 w = 0, \tag{4}$$

где $a = \sqrt{3}\, k_p/\mathrm{tg}(\theta/2)$ при $h = 2r\,\mathrm{tg}(\theta/2)$; $k_p = \omega/v_p$, $v_p^2 = 2v_t^2/(1-\nu)$, ν — коэффициент Пуассона; v_p, v_t — скорости продольной волны в тонкой пластине и объемной сдвиговой волны; w — изгибная компонента вектора смещений в волне. Общее решение (4) имеет вид [10].

$$w = r^{-1/2}\left[C_1 J_1(x) + C_2 N_1(x) + C_3 J_1(ix) + C_4 N_1(ix)\right], \tag{5}$$

где $x = 2\sqrt{ar}$; C_j — амплитудные постоянные, $j = 1 \div 4$; J_1, N_1 — функции Бесселя 1-го и 2-го рода. Используя известное асимптотическое представление цилиндрических функций

$$\left\{\begin{matrix} J_m(x) \\ N_m(x) \end{matrix}\right\} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{\begin{matrix} \cos(x - m\pi/2 - \pi/4) \\ \sin(x - m\pi/2 - \pi/4) \end{matrix}\right\} \text{ при } x \to \infty,$$

находим, что дополнительный сдвиг фазы при пробеге луча до точки $r=0$ равен $-3\pi/4$, а сдвиг фазы $\Delta\Phi_R$ при падении и отражении луча равен тогда удвоенному этому значению, т. е. $(-3\pi/2)$. Следует подчеркнуть, что данное значение $\Delta\Phi_R$ не связано с взаимодействием изгибных волн с неоднородными колебаниями вблизи ребра клина, описываемыми последними слагаемыми в уравнении (5), поскольку граничные условия обращения в нуль соответствующих моментов сил на ребре клина выполняются автоматически без привлечения неоднородных решений. Это обусловлено равенством на ребре нулю локальной толщины клина и соответственно цилиндрической жесткости, которой пропорциональны моменты сил. Найденное значение $\Delta\Phi_R$ должно использоваться также в теории отражения и прохождения волн Рэлея при их нормальном падении на ребро острого клина [11].

Используя полученное приближенное значение $\Delta\Phi_R$ (при его нахождении не учитывалась зависимость решения от z) и учитывая симметрию лучевых траекторий и произвольность выбора значений r_1 и z_1, условие (3) можно представить в виде

$$\varphi \equiv \int_0^{r_0} k_r dr = \pi(n+1). \tag{6}$$

Для вычисления интеграла в (6) необходимо в явном виде задать зависимость $h(r)$, а также определить явно зависимость $k(h)$ для волн Лэмба в плоскопараллельной пластине с толщиной h, поскольку $k_r^2 = k^2(h) - k_z^2$. Будем считать, что

$$h^{-1} = [2r \operatorname{tg}(\theta/2)]^{-1} + h_0^{-1}. \tag{7}$$

Такая аппроксимация при $h_0 = \infty$ соответствует клину, образованному пересечением двух плоских поверхностей, а при $h_0 \neq \infty$ — клину, переходящему вдали от ребра в плоскопараллельную пластину с толщиной h_0. Для достаточно больших h_0, $h_0 \gg \operatorname{tg}^2(\theta/2)/[2\sqrt{3}\, k_p]$, влияние конечности h_0 на $\Delta\Phi_R$ пренебрежимо мало и далее учитываться не будет. Зависимость $k(h)$ для волн Лэмба определяется трансцендентными дисперсионными уравнениями и поэтому в явном виде может быть записана лишь в виде приближенного соотношения. Исходя из качественного вида дисперсионных зависимостей для волн Лэмба, которые можно найти, например, в монографии [12], можно сразу сделать вывод, что локализованными вблизи ребра острого клина будут только антисимметричные волны, поскольку только для антисимметричной нулевой волны Лэмба фазовая скорость с уменьшением толщины пластины падает, и вблизи ребра клина, таким образом, выполняются условия волноводного распространения. Это согласуется с известными численными расчетами на ЭВМ [1, 4], согласно которым симметричные волны в остром клине как собственные моды отсутствуют (скорость этих волн в острых клиньях превышает скорость волн Рэлея, поэтому если симметричные волны и существуют в данном случае, то реализуются лишь как волны утечки).

Из анализа точного дисперсионного уравнения для нулевой антисимметричной волны Лэмба [12] известны асимптотические решения для предельных случаев: $k_a^2 \simeq 2\sqrt{3}\, k_p/h$ при $\omega h \to 0$ и $k_a \simeq k_R$ при $\omega h \to \infty$, где $k_R = \omega/v_R$, v_R — скорость волны Рэлея. Комбинируя эти асимптотики, получаем явное выражение для $k_a(h)$, достаточно точное во всем диапазоне возможных значений ωh:

$$k_a^2(h) \simeq 2\sqrt{3}\, k_p/h + k_R^2. \tag{8}$$

Подстановка (7) и (8) в (6) и использование замены $r = a \sin^2 t/b^2$, где $b^2 = k_z^2 - k_R^2 - 2\sqrt{3}\, k_p/h_0$, приводят интеграл φ к виду

$$\varphi = (a/b) \int_0^{\pi/2} [1 + \cos(2t)]\, dt = \pi a/(2b). \tag{9}$$

Вытекающее из (6) и (9) соотношение $a = 2(n+1)b$ определяет искомое выражение для фазовой скорости клиновых волн v:

$$v = v_\infty [1 + v_\infty^2/v_R^2 + v_\infty^2 2\sqrt{3}/(\omega h_0 v_p)]^{-1/2}, \tag{10}$$

где $v_\infty = 2 \operatorname{tg}(\theta/2)(n+1) v_p/\sqrt{3}$, а индекс n соответствует номеру нормальной волны клина. Значение v для клина с плоскими гранями ($h_0 = \infty$) будем далее обозначать через v_W.

Сравним полученное решение с результатами предшествующих теоретических исследований. Приближенные аналитические выражения для скорости клиновых волн в литературе имеются только для случая, когда образующие клин поверхности являются плоскими. Для

этого случая в статьях [2, 13] приведена эмпирическая формула, основанная на численных расчетах на ЭВМ, выполненных в работе [1]:

$$v_W = v_R \sin[(n+1)\theta] \quad \text{при} \quad (n+1)\theta < 90^\circ. \tag{11}$$

В дальнейшем соответствующая формула была выведена и аналитически на основе теории изгибных волн в тонких пластинах [6]:

$$v_W = v_t\, 2\,\mathrm{tg}(\theta/2)\,[1+2n(n+2)/(3-3\nu)]^{1/2}. \tag{12}$$

Имеется также публикация [7], в которой вариационным методом получена следующая система уравнений для определения v_W при распространении клиновых волн в кубическом кристалле с кристаллографическими осями, направленными вдоль биссектрисы угла и ребра клина:

$$\begin{gathered}\bar{v}^2 = (\theta^2/24)\,[\bar{c}_{11}(5\bar{\alpha}^2+3/\bar{\alpha}^2)-\bar{c}_{12}(10-4\bar{\alpha}^2)+12],\\ \bar{\alpha}^2 = (\bar{c}_{11}-\bar{v}^2)/[(2\bar{v}/\theta)^2+5\bar{c}_{12}/3-2+\bar{v}^2/2],\end{gathered} \tag{13}$$

где $\bar{v}^2 = (v_W)^2\rho/c_{44}$, $\bar{c}_{11} = c_{11}/c_{44}$, $\bar{c}_{12} = c_{12}/c_{44}$; c_{11}, c_{12}, c_{44}, ρ—упругие модули и плотность кристалла.

Несмотря на внешние различия формул (10)—(13), функциональная зависимость v_W от θ в предельном случае $\theta \to 0$ для всех этих формул одинаковая: $v_W \sim \theta$. Коэффициенты же пропорциональности в этих линейных по θ зависимостях несколько отличаются друг от друга и равны $v_t(1+n)[2/(3-3\nu)]^{1/2}$ для формулы (10), $v_R(1+n)$ для (11), $v_t[1+2n(n+2)/(3-3\nu)]^{1/2}$ для (12) и для (13) $[c_{44}/(2\rho)]^{1/2}\{[(5c_{11}+4c_{12})c_{11}/(3c_{44}^2)]^{1/2}+2-5c_{12}/(3c_{44})\}^{1/2}$, переходя в изотропном случае в выражение

$$v_t\{[3(5-\nu)(1-\nu)]^{1/2}+3-11\nu\}^{1/2}/(6-12\nu)^{1/2}.$$

Тем не менее численные значения этих коэффициентов, как показывает их сравнение для низшей моды в различных материалах (рис. 2, *а*), довольно близки друг к другу. В частности, при $\nu = 1/3$ имеет место полное совпадение (10) с формулой (12), которая в области $\theta \ll 1$ является наиболее точной из приведенных выражений.

Сравнение аналитических зависимостей $v_W(\theta)$—(10), (12)—с точным численным решением [1] для низшей моды дюралюминиевого клина в широком диапазоне углов θ приводится на рис. 2, *б*. При малых θ представленные зависимости практически совпадают в соответствии с рис. 2, *а*. С ростом θ, согласно формуле (12), полученной в работе [6], v_W отклоняется от линейной по θ зависимости в сторону больших значений, хотя, согласно точному численному решению [1] (кривая *5* на рис. 2, *б*), отклонение происходит в противоположную сторону. Формула (10), полученная в настоящей работе, правильно описывает эту тенденцию. Если в формуле (10) перейти к пределу $v_R \to \infty$, соответствующему переходу в аппроксимации (8) к закону дисперсии изгибных волн в тонких пластинах (теория тонких пластин использовалась при выводе (12)), то получим $v_W \sim \mathrm{tg}(\theta/2)$, т. е. функциональная зависимость $v_W(\theta)$ в формуле (10) будет такой же, что и в (12). Отсюда следует вывод, что нарушение точности результатов работы [6] с ростом θ обусловлено тем, что в рамках классической теории тонких пластин, использованной в этой работе, не учитывается ограничение скорости изгибных волн с ростом толщины пластины. С увеличением угла θ расхождение формулы (10) с точным численным решением увеличивается в соответствии с используемым при ее

выводе приближением $\theta \ll 1$. Однако расхождение это невелико и, кроме того, оно может быть существенно уменьшено с помощью небольшой коррекции — замены в этой формуле v_R на v_t, вытекающей из анализа предельного случая $\theta=180°$. В отличие от численных результатов работы [1] формула (10) применима не только к дюралюминию, но и к другим материалам, в том числе и к гексагональным монокристаллам при условии, что плоскость их поперечной изотропии совпадает с плоскостью симметрии клина.

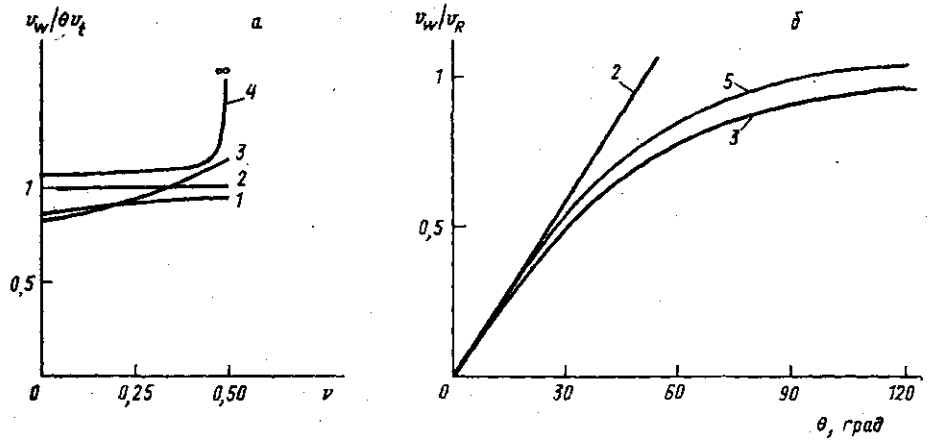

Рис. 2. Зависимости относительной скорости клиновых волн v_W: *а* — от коэффициента Пуассона ν в острых клиньях с углом $\theta \ll 1$ и *б* — от угла θ дюралюминиевого клина (ν=0,335): *1* — по формуле (11), *2* — (12), *3* — (10), *4* — (13), *5* — [1]

Перейдем к случаю конечных значений h_0, соответствующих распространению волн вдоль лезвия бритвы или ножа. В отличие от клина с плоскими гранями здесь, как следует из (10), возникает геометрическая дисперсия и групповая скорость v_g отличается от фазовой:

$$v_g = v/\left[1 - v^2\sqrt{3}/(h_0 v_p \omega)\right]. \tag{14}$$

В высокочастотной области, где фазовая скорость может аппроксимироваться выражением $v = v_W - v_W^3\sqrt{3}/(\omega h_0 v_p)$, групповая скорость от частоты не зависит: $v_g = v_W$.

Точность полученных соотношений при $h_0 \neq \infty$, так же как и при $h_0=\infty$, зависит от n, а именно возрастает с ростом n. Например, при $n \to \infty$, $h_0=\infty$, $v_W \ll v_R$ из (10) получаем $v_W = 2\,\mathrm{tg}\,(\theta/2)\,n v_p/\sqrt{3}$, что полностью совпадает с аналогичным предельным соотношением, следующим из (12). Это связано с тем, что на высшие моды оказывает более слабое влияние значение фазового сдвига ΔΦ, определенного выше приближенно, без учета взаимодействия изгибных колебаний и волн, а предел $n \to \infty$ соответствует полному пренебрежению ΔΦ.

Лучевые траектории клиновых волн находятся из уравнения $dz/dr = k_z/k_R$, решение которого с использованием аппроксимации (8) можно представить в виде

$$z' = \arcsin\sqrt{r'} - \sqrt{r'(1-r')} + z_0', \tag{15}$$

где $z' = zb^2/[2(n+1)k_z]$, $r' = rb/[2(n+1)]$, z_0' — произвольная постоянная. Результаты расчетов по формуле (15) приведены на рис. 1, на

котором под координатами r, z подразумеваются безразмерные переменные r', z'.

Итак, представленные в настоящей работе результаты демонстрируют возможность развития простой и достаточно точной теории клиновых акустических волн на основе использования лучевых представлений. Этот же подход перспективен и для анализа волноводных эффектов в пластинах переменной толщины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Lagasse P. E.//Electron. Lett. 1972. 8, N 15. P. 372. [2] Mason I. M., Motz M. D., Chambers J.//Ibid. N 17. P. 429. [3] Maradudin A. A., Wallis R. F., Mills D. L., Ballard D. L.//Phys. Rev. 1972. **B6**, N 4. P. 1106. [4] Maradudin A. A.//Jap. J. Appl. Phys. 1974. Suppl. 2, Pt. 2. P. 871. [5] Datta S., Hunsinger B. J.//Phys. Rev. 1977. **B16**, N 10. P. 4224. [6] McKenna J., Boyd G. D., Thurston R. N.//IEEE Trans. 1974. **SU-21**, N 3. P. 178. [7] Wagers R. S.//J. Appl. Phys. 1973. **44**, N 11. P. 4813. [8] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М., 1979. С. 239. [9] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М., 1963. С. 200. [10] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976. С. 476. [11] Можаев В. Г., Крылов В. В.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1985. **26**, № 4. С. 76. [12] Викторов И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М., 1966. С. 85. [13] Lagasse P. E., Mason I. M., Ash E. A.//IEEE Trans. 1973. **SU-20**, N 2. P. 143.

Поступила в редакцию
16.06.88

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 5

ГЕОФИЗИКА

УДК 550.383:523.4—845:523.038

ПОЛЯ БЫСТРО ВРАЩАЮЩИХСЯ НЕЙТРАЛЬНЫХ ТЕЛ

В. И. Григорьев, Е. В. Григорьева, В. С. Ростовский

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий; ИФЗ АН СССР)

Электрические и магнитные поля вращающихся тел исследуются методом Хартри — Слэтера. Сделаны оценки для полей на планетах и звездах, порождаемых градиентами давлений и вращением.

П. Н. Лебедевым опубликованы в 1911 г. результаты экспериментальных исследований вопроса о том, порождает ли вращение нейтрального тела магнитное поле [1]. Побудительной причиной этих исследований явились работы [2, 3] Сузерленда, выдвинувшего гипотезу, что «в каждом нейтральном атоме центры тяжести его разноименных зарядов не совпадают и так сдвинуты друг относительно друга, что центры отрицательных зарядов описывают* бо́льшие пути, чем центры положительных», как написано в работе П. Н. Лебедева. Очевидно, что это должно порождать магнитное поле. Физическая причина смещения зарядов, по гипотезе Сузерленда,—гравитационное воздействие, механизм его оставался нераскрытым и не мог получить теоретического объяснения в доквантовый период. П. Н. Лебедев выдвинул предположение, что аналогичное смещение зарядов дол-

* Из-за вращения.